

PŘÍSPĚVKY PROF. CYRILA HÖSCHLA
publikované v Bulletinech České společnosti pro mechaniku



Česká společnost pro mechaniku
Praha 2016

Obsah

Étos a pravda v dějinách mechaniky	3
Newtonovo jablko	12
Rovnováha ve statice, dynamice a termodynamice	17
Jak daleko je dnešní mechanika od Babylonské věže?	29
Rozumější fyzikové klasické mechanice?	33
Jsou Newtonovy zákony základem mechaniky pevných těles?	36
Tajemství Bernoulliho rovnice	41
Síly a energie v mechanice soustav	47
Princip superpozice v mechanice poddajných těles	57
Odkaz hraběte Adhémara Jeana Clauda Barrého de Saint-Venanta dnešku	63
O rázovém namáhání těles	66
Erozivní účinek dopadajících kapek	77
Theodore von Kármán a vlnění v elasticko-plastických tělesech	79
O suchém tření v mechanice soustav	87
O práskání biče a chytání ryb na udici	93
O jednom experimentu barona Eötvöse	100
O jednom paradoxu v mechanice tuhých těles	104
Bouassův-Sardův regulátor	108
Humor a hračky v učebnicích mechaniky	113
Rozbalování svitku střešní krytiny	123
Příběhy dvou malých vodních elektráren	136
Pohyb na vzduchovém polštáři	143
Historie variačního počtu	150
Invariantní variační úlohy Emmy Noetherové	163
Věty o reciprocitě jako mocný nástroj analýzy	168
O třech způsobech výkladu Gaussovy integrační formule	179
Diskrétní a kontinuální modely	189
O společném základu numerických a analytických metod teorie pružnosti	201
Elastická stabilita z hlediska statiky a dynamiky	209
Lagrangeova funkce v newtonské a relativistické mechanice	219
Detektivka s dobrým koncem	227
České vysoké školy ve dvacátém století	239
Tak to skutečně bylo	254
Použitá literatura	260

Étos a pravda v dějinách mechaniky

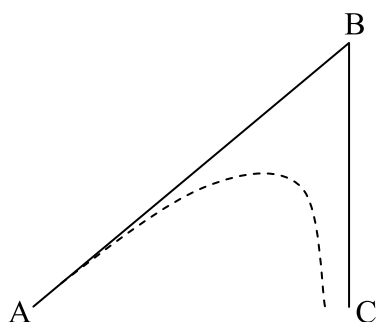
Jsem racionalista, avšak v našem životě existuje mnoho paradoxů a etika je jedním z nich. Říkám, že bychom měli dělat to či ono, a to, co děláme, dělat svobodně. To je vskutku kantovský paradox.

Karl R. Popper

Mechanika jako věda má své počátky v době nejvýznamnější odluky středověké vědy a víry. Badatelé, jako byli Koperník, Kepler, Tycho de Brahe a Galileo, se jen málo starali o filosofii a teologii, neboť byli zcela uchvázeni postupným objevováním fyzikálních zákonů, jimiž se řídí nejen tělesa na Zemi, ale i celá soustava nebeských těles. Společnost a její představitelé však nepřijímali nové poznatky snadno. Zejména církve si uvědomovala, že vyvikláním několika kamenů se může nakonec celá její hierarchická stavba zhroutit.

Středověká filosofie neznala primát rozumu; nad rozum stavěla vyšší autoritu, Písmo svaté a nadpřirozené zjevení v něm skryté. Z Písma se odpovídalo nejen na otázky týkající se světa nadpřirozeného, ale i na otázky světa vezdejšího. Přitom byl brán v potaz také Aristoteles, který byl za doby rozkvětu scholastické filosofie zván „předchůdcem Kristovým v přírodním vědění“.

Aristoteles dovedl předpovědět například průběh šikmého vrhu, ale nedovedl o něm uvést žádné číselné údaje. Do své předpovědi zahrnul i odpor vzduchu, ale nedovedl jej oddělit jako nepodstatný jev od podstatného jevu, totiž od konstantního gravitačního zrychlení. Proto tvrdil, že všechna tělesa padají k zemi rovnoměrně, avšak železo rychleji než dřevo. Šikmý vrh popsal Aristoteles takto (obr. 2.1): kámen se pohybuje přímočaře po dráze AB, v bodě B se unaví a spadne po dráze BC. Dráhu ABC je možné považovat za tečny k balistice, vyznačené čárkovaně. Výrok Aristotelův tedy není falešný, ale nepřesný. To ještě nebyla věda, ale pouhá přírodní filosofie.



Obr. 2.1

Základní dogmata středověké církve se dají shrnout takto: *V Adamu lidstvo zhřešilo, v Kristu bylo vykoupeno*. Svět byl průhledný v prostoru i v čase. Člověk měl poučení o dějinách lidstva od stvoření světa až k poslednímu soudu. Do nebe stálic bylo vidět každé noci, Bůh byl člověku blízký. Věcí, po nichž by se mohl středověký člověk ještě tázat, bylo málo. Země je středem světa, v němž nehybně tkví, člověk je korunou a pánem tvorstva, kvůli člověku je zde svět i Země.

Nenáhle však ovládl názor, že Země nemá podobu ploché desky, ale že je kulatá. Co je však na spodní polovině koule? Je snad dokonce také obydlena lidmi? Existují protinožci? I o tom se hledalo poučení v Písmu. Avšak pozvolna se uplatňuje názor Koperníkův, podle kterého se Země otáčí kolem své osy a zároveň i kolem Slunce. Svět Koperníkův byl však stále ještě světem konečným, omezeným nebem stálic. Jeho učení bylo vysvětleno v knize *De revolutionibus orbium caelestium*, která vyšla roku 1543. V těchto myšlenkách pokračovali Galileo Galilei a Giordano Bruno. První exaktně, druhý filosoficky. A co všechno nezpůsobili! Země přestala být středem světa, člověk přestal být středem stvoření, vesmír se stal prostorově nekonečným, není již omezen nebem stálic. Hvězdy byly vypáčeny ze svých pevných sfér, byl rozbit pevný obal stálic obkličující všechno a člověku se otevřel volný rozhled do nekonečného prostoru s nespočetnými jinými světy mimo sluneční soustavu. Církevní dogmata se stala velmi pochybnými. Proto byla Koperníková kniha na základě odborného posudku

dána na index zakázaných knih. Stalo se tak roku 1616, tedy 73 let poté, co kniha vyšla. Zmíněný posudek zněl takto:

Tvrdit, že Slunce nepohnutě stojí ve středu světa, je nesmyslné, filosoficky klamné a přímo kacířské, poněvadž je to ve zřejmém rozporu k Písmu svatému. Tvrdit, že Země nestojí ve středu světa, že není nehybná, nýbrž že se dokonce denně otáčí, je nesmyslné, filosoficky klamné, je to přinejmenším chybná domněnka.

Koperníkova kniha zůstala na indexu plných 141 let. Koperník přitom své objevy celý život skrýval a knihu vydal teprve na sklonku svého života. Sám o tom napsal: *Nikoli devět let, nýbrž čtyřikrát devět let choval jsem spis u sebe, až konečně vynikající učenci na mne naléhali a mě k tomu měli, abych děle z bázně neotálel s uveřejněním.* Prvý exemplář knihy mu byl podán do ruky na smrtelné posteli, kdy již pozbyl vědomí. Koperník věnoval své dílo papeži Pavlu III. Dedikace byla přijata, avšak spis byl doplněn předmluvou kazatele Osiandera z Norimberku. Ten zdůraznil, že jde o pouhou matematickou hříčku. *Nové názory, čteme tam, snad jsou stejně dobré jako staré, a nikdo nesmí očekávat, že by astronomie dovedla učit něčemu, co by bylo jisté.* To rozzlobilo mladého dominikánského mnicha Giordana Bruna (1548–1600), který rozeznal, že předmluvu nepsal Koperník, ale nějaký *nevědoucí a samolibý osel, jenž ostatním oslům chtěl knihu upravit.*

Martin Luther se výmyslu Koperníkovu prostě vysmál, když napsal: *Ten blázen chce celé umění astronomické převrátit. Ale Písmo Sváté praví nám, že Josua kázal Slunci tiše státi, nikoli Zemi.* Josua tedy zastavil podle tohoto biblického příběhu pohyb Slunce. Nemohl by Slunce zastavit, kdyby stálo. A v žalmu stojí psáno o Hospodinu, že *okršlek země upevnil, aby se nepohnul* (Žalm 93,1). Proti Koperníkovi byl dokonce i Jan Amos Komenský, který se pokusil Koperníkovo učení vyvrátit ve spise *Refutatio astronomiae Copernicianae*. Tento spis se do našich dnů nezachoval. Protestantský teolog F. Melanchthon zase napsal ve svých *Základech fyziky* (Initia physicae), že *takové podivnůstky se vymýšlejí z pouhého novotářství, a aby se projevila rozumová bystrost. To však není slušné, může to dávat škodlivý příklad. Člověk se pouští do takových absurdních myšlenek, jen aby svého*

ducha cvičil, místo aby v bázni Boží přijímal pravdu zjevenou a tou se spokojil, zvláště když nová nauka výroku bible patrně odporuje.

Tycho de Brahe (1546–1601) i Johannes Kepler (1571–1630) marně usilovali o to, aby nějakým kompromisem uvedli Koperníkovo učení do souladu s církevními dogmaty. Stalo se, že Giordano Bruno, plný neklidu a vášně, ukázal k nutným důsledkům Koperníkova učení a neohroženě po celé Evropě hlásal nové názory. Na svou stranu získal francouzského krále Jindřicha III (1574–1581), vyslyšela ho i anglická královna Alžběta (1558–1603), kterou velebil pro její moudrost. Ta ho však považovala za nebezpečného radikála, nezkrtného rozvraceče. Nakonec byl Bruno zatracen církví katolickou i protestantskou, ztrácel přátele, které si často zbytečně svým vystupováním zneřátoval. Vrátil se do italských Benátek, kam ho vylákal jeho údajný přítel Mocenigo. Pak ho udal Svaté Inkvizici. Bruno své učení nakonec odvolal, ale nebyl propuštěn, protože si ho vyžádala vyšší instance v Římě. Tam strávil ve vězení léta 1593–1600. Tentokrát odmítal cokoliv odvolat. Podvakerát dostal vždy lhůtu čtyřiceti dnů, aby si vše rozmyslel, ale nakonec byl odsouzen a vydán světské moci k „milosrdné“ smrti upálením. Ještě mu bylo po rozsudku dáno posledních osm dní na rozmyšlenou, ale marně. Ke svým soudcům prohlásil: *Možná že vy, moji soudcové, vynášíte tento rozsudek proti mně s větším strachem, než jej já přijímám.*

Mezitím Galileo Galilei (1564–1642) horlivě a neúnavně pokračoval ve svých výzkumech. Roku 1608 si vyrobil dalekohled a zjistil to, co Koperník pouze deduktivně odvozoval. Galilei objevil, jak se otáčejí Jupiterovy měsíce, vyložil Mléčnou dráhu jako skupinu hvězd, našel, že se Venuše otáčí kolem Slunce. V dopisu Keplerovi r. 1597 napsal:

Je to neštěstí, že ti, kteří hledají pravdu a žádné nesprávné metody nesledují, jsou tak vzácní. Před mnohými lety jsem dospěl ke Koperníkovu názoru a našel jsem z tohoto hlediska příčiny mnoha přírodních úkazů, jež nelze obyčejnou hypotézou vyložit. Napsal jsem mnohé důvody pro i proti, jež jsem se však dosud neodvažoval vydat na světlo, neboť jsem byl zastrašen osudem našeho učitele Koperníka. Ten si u několika lidí získal nesmr-

telnou slávu, u nesčetných však – je tolik bláznů na světě! – se stal předmětem vtipu a posměchu.

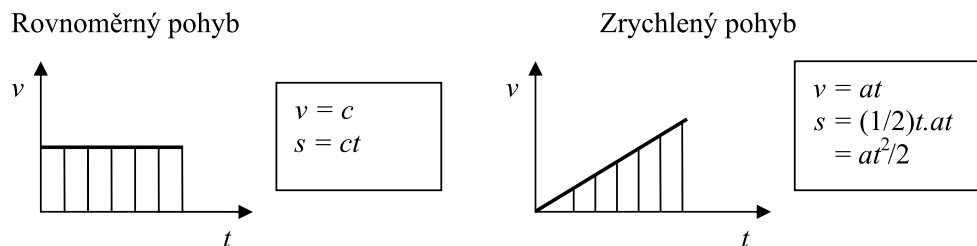
Vývody Koperníkovy a Brunovy bylo možno považovat za omyl, za sofisma, za spekulaci. Ale Galilei odkryl fakta, o nichž nebylo možno pochybovat, o nichž bylo možno se v dalekohledu kdykoli znovu přesvědčit. To vzbudilo úžas a zděšení. Galileův spis byl roku 1632 ihned zakázán a o rok později Galilei Svatou Inkvizicí odsouzen, aby kleče odpřisáhl celé učení. Musil přiznat, že *nesprávné je učení, že Slunce je nehybný střed světa, Země že naproti tomu není střed světa a pohybuje se*. Musil dále přísahat, že *příště ani ústně, ani písemně nic nevysloví, z čeho by se učení to dalo vyvozovat, naopak že Svaté Inkvizici udá, pozná-li nějakého kacíře nebo někoho, kdo by byl z kacířství podezřelý*.

Tím si Galilei zachránil život. Oslepl a žil až do smrti v domácím vězení. Zemřel ve věku 78 let. Jeho křivou přísahou nebyl pohyb Země zastaven, nebyl zastaven ani oběh nových názorů a myšlenek, přestože tisknout i takové knihy, v nichž se učí, že se Země točí kolem Slunce, je dovoleno teprve od roku 1822.

Můžeme si klást otázku, který z obou mužů – Bruno či Galileo – se zachoval správněji. Etika nám přikazuje setrvat u objevené pravdy. Zároveň však požaduje, abychom tento příkaz splnili dobrovolně. V tom je její „kantovský paradox“. Ve skutečnosti nebylo tak důležité, zda Galileo svou pravdu odvolá či nikoli, důležitější bylo, že ji mohl alespoň po určitou dobu svobodně vyslovit a hlásat. Nebeská mechanika, na které měli rozhodující podíl Kepler, Tycho de Brahe, Koperník, Galilei a Newton, tehdy otevřela brány pokroku a přispěla k rozvoji všech věd, který je nemyslitelný bez svobody, nejcennějšího lidského statku. Jak napsal Carl L. Becker: *Každá země, která myslí víc na své pohodlí a klid než na svou svobodu, ztratí svou svobodu a ironie přitom je, že ztratí také své pohodlí a klid*.

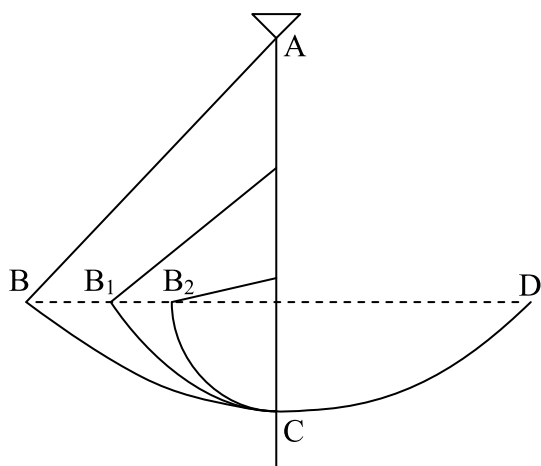
Metoda, kterou pracoval Galilei, už měla všechny atributy vědecké práce. Vyslovil hypotézy, které byl připraven odvolat, kdyby se neosvědčily. Kriticky zkoumal výsledky vlastních pokusů, aby vyloučil možné chyby. Ukážeme to na příkladu, jak zkoumal volný pád. Čas měřil pulsem na

své ruce. Potřebné pohybové zákony odvodil podle obr. 2.2. Všiml si, že dráha s je „součtem výšek“ v grafu znázorňujícím závislost rychlosti v na čase t (což je náznak integrace $s = \int v dt$, kterou však Galilei ještě neznal).



Obr. 2.2

Nejprve zkusil odvodit zákon zrychleného pohybu volného pádu z předpokladu, že rychlost je úměrná dráze. To se však neosvědčilo, a tak předpoklad změnil, jak uvedeno na obr. 2.2 vpravo. Předpokládal, že volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb, a chtěl se o tom experimentálně přesvědčit. Neměl však možnost změřit průběh tak rychlého děje. Proto místo toho pouštěl kuličky na nakloněném prkně (nakloněné rovině) se zářezy ve vzdálenostech 1, 4, 9, 16, 25 dm. Kuličky ťukaly rovnoměrně, což odpovídalo zákonu uvedenému na pravé polovině obr. 2.2. S tím se však Galileo nespokojil. V jeho mysli se objevila pochybnost: *platí totéž pro volný pád, co pro nakloněnou rovinu?* Je třeba dokázat, že výsledná rychlost pohybu (při stejném rozdílu výšek) je nezávislá na úhlu naklonění roviny. To bylo třeba dokázat experimentálně. Galileo k tomu použil kyvadlo, které tvoří koule zavěšená na ohebném laně. Tomu se do cesty může nad bodem C nastavit kolík (obr. 2.3). Galileo zjistil na tomto kyvadlu, že koule vypuštěná s nulovou počáteční rychlostí z bodů B, B₁, B₂ dospěje vždy do stejného bodu D, má tedy v bodě C vždy stejnou rychlost, *nezávisle na strmosti dráhy BC, popř. B₁C a B₂C*. Proto výsledná rychlost koule nemůže záviset na naklonění roviny a bude stejná i při volném pádu, tj. při vertikální nakloněné rovině, ovšem při stejném rozdílu výšek. Těmito důmyslnými pokusy Galilei obešel nutnost měřit čas volného pádu, k čemuž neměl potřebné prostředky.



Obr. 2.3

O tom, jak Galilei dokazoval nezávislost gravitačního zrychlení na hmotnosti padajícího tělesa házením různě těžkých těles z věže, kolují v literatuře nepravdivé smyšlenky. Galilei dobře věděl, že železná koule by dopadla na zem dříve než dřevěná, vypuštěná ve stejném okamžiku ze stejné výšky. To věděl už i Aristoteles. Proto také věděl, že by takovým pokusem své protivníky o své pravdě nepřesvědčil. Ve skutečnosti šlo o myšlenkovou dedukci: pustím-li z věže dvě stejná jednokilová závaží, budou padat stejně, svážu-li je tenkou nitkou; nic se na jejich pádu nezmění, jenže nyní půjde o jedno dvoukilové závaží. Proto na hmotnosti nezáleží, volný pád probíhá bez odporu vzduchu u všech těles s týmž tíhovým zrychlením.

U kolébky mechaniky jako vědy je tedy grandiózní konflikt mezi vědou a vírou, který jsme se pokusili popsat. Lidstvo se poučilo, v moderní době jsou vědecké poznatky běžně přijímány a šířeny a různá náboženství je – až na výjimky – asimilují a nebrání se jim. Ale je tomu tak opravdu? Už za francouzské revoluce bylo popřeno katolické náboženství a vyhlášen kult Rozumu a Nejvyšší bytosti. Francouzi se však brzo vrátili ke katolickému náboženství, neboť bylo konec konců rozumnější. I ve dvacátém století jsme byli svědky, jak byly v autoritativních režimech s pseudonáboženskými ideologiemi (fašismem a komunismem) z ideologických důvodů zatracovány celé vědní obory. Abychom zůstali u mechaniky, tedy Einstei-

nova relativistická mechanika byla v Hitlerově Německu odsuzována jako *židovský výmysl, kterým se měla podkopat arijská víra v absolutno*. Na druhé straně byly i paranoidní výtvořiny vydávány za vědu, měl-li jejich autor oporu u státních autorit v uzavřené společnosti. To byl případ universitního profesora a vzdělaného komunisty Františka Kahudy (1911–1987), svého času československého ministra školství (ministrem byl v letech 1956–1963), vynálezce mentionů jakožto elementárních částic myšlenek, jež vznikají excitací psychonů (což jsou superlehké elementární částice), a mohou se pohybovat i rychlostí převyšující rychlost světla ve vakuu. Pak se mentiony stávají nositeli záporné energie. Mohou proto odebrat fyzikálním přístrojům energii. Kahuda vedl státem bohatě dotovaný výzkum a „dokázal“, že silou myšlenky lze zastavit větrníček roztočený elektromotorkem ve vakuu, a to až na vzdálenost asi 800 km [KAHUDA (1975), (1980)]. Jako psychotronik určoval, kde jsou nová ložiska hnědého uhlí, a tam se pak uskutečňovaly nákladné geologické vrty, ale uhlí se nenašlo. Jiným takovým příkladem je nová teorie gravitace, kterou vynalezl neblaze proslulý „normalizační“ ministr školství profesor Jaromír Hrbek (1914–1992) [HRBEK (1979)]. Takových příkladů bychom mohli uvést mnoho, a to nejen z mechaniky [BLAŽEK (1994)].

Je na čase čtenářům vysvětlit, proč tyto příběhy připomínáme. Inu proto, že i v době superpočítačů a internetu (avšak také islámského fundamentalismu a terorismu) hrozí nebezpečí, že se vzdálíme od vědeckých metod a propadneme módním trendům, například fetišizaci moderní výpočtové techniky. Etolog Konrád Lorenz o tom v knize [LORENZ (1997)] píše: *Bohužel se však slast z obsluhy počítače může pod vlivem slasti z fungování osamostatnit stejně jako jiné činnosti. Pak již používání počítače přestává být prostředkem k dosažení určitého cíle a stává se samoučelem. Jinými slovy: mladý vědecký pracovník bude dávat přednost těm úlohám, k jejichž řešení může hojně využívat počítače*. Opravdu je dnes snazší najít zdatné programátory než zdatné experimentátory a vědce, schopné kriticky posuzovat výsledky výzkumné práce. Základem pokroku je svobodné střetávání myšlenek a každá jednostrannost je jeho brzdou. Jen tehdy, je-li moderní

výpočetní a sdělovací technika používána ve službách kritického myšlení, jde o vsutku neocenitelný nástroj otvírající nové obzory, nástroj, o kterém se dřívějším generacím nemohlo ani snít.

Mechanika jako věda není starší než čtyři století. Netýká se jenom stro-
jů, jak by název naznačoval. Jde o vědu, která už ve svých začátcích pohnu-
la dějinami. A jako každá skutečná věda je i ona nikdy nekončícím dobro-
družstvím poznání [POPPER (1992)].

Newtonovo jablko

O Siru Isaacu Newtonovi (1642–1727) se tradují dvě příhody:

1. *Svůj gravitační zákon Newton objevil, když seděl v ovocném sadu a na hlavu mu spadlo jablko. Asi bylo červivé.*

2. *Sedmadvacetiletý Newton se stal vedoucím katedry, když mu jeho předchůdce Isaac Barow roku 1669 postoupil své místo, protože považoval Newtona za schopnějšího.*

Jenom jedna z těchto příhod je pravdivá. Kdybychom se našich čtenářů dotázali, která příhoda se jim zdá pravděpodobnější, většina by asi označila první. Opak je pravdou. Druhou příhodu potvrzují znalci historie přírodních věd a první příhodu vyvrací sám Newton, když o svých výzkumech a „matematických principech“, zčásti uveřejněných nejprve v knize *De motu corporum* vydané roku 1684 a pak v úplnosti v knize *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) prohlásil, že jsou výsledkem „usilovného a nepřetržitého přemýšlení“. Přesto se budeme prvou příhodou zabývat, neboť nám dá příležitost zamyslet se nad druhým Newtonovým zákonem. Jde totiž o volný pád jablka, který tento zákon popisuje, a nás bude zajímat, jaká síla Newtona do hlavy vlastně uhodila.

Většina středoškoláků si ze školy pamatuje druhý Newtonův zákon jako větu „síla rovná se hmota krát zrychlení“, kterou lze napsat ve tvaru rovnice $F = ma$. To je však velmi povrchní znalost. Především síla a zrychlení jsou vektory, takže uvedená rovnice by měla spíše vypadat takto:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} . \quad (3.1)$$

Odpověď nás neuspokojuje také proto, že nevíme o „hmotě“ nic. Je to totéž jako hmotné těleso? Jakého tvaru, jak velké? Jaké má vlastnosti? Kde má síla \mathbf{F} působiště? Vektor \mathbf{a} je zrychlením tohoto působiště či jiného bodu? A jakého? A neměli bychom spíše mluvit o hmotnosti místo o hmotě? Poznamenejme ještě, že rovnici (3.1) v Newtonových spisech nenajdeme. Newton uveřejnil svůj druhý zákon v podobě latinské věty, které odpovídá

rovnice $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$, kde \mathbf{v} značí rychlost a součin $m\mathbf{v}$ hybnost. Rovnici (3.1) odtud dostaneme, nezávisí-li hmotnost m na čase.

V některých učebnicích se rovnice (3.1) označuje jako pohybová rovnice hmotného bodu. Tím se rozumí tak malá hmotná částice, že se její rotační setrvačnost při pohybu popsaném rovnicí (3.1) prakticky neprojevuje. Uvedená rovnice však platí pro jakékoli těleso při jeho translačním pohybu, při kterém je v každém okamžiku rychlost všech bodů tělesa stejná, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Pak je ovšem stejné i jejich zrychlení $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Síla \mathbf{F} , což je výslednice všech sil na těleso působících, musí procházet těžištěm tělesa. Jablko padající na Newtonovu hlavu tyto předpoklady velmi dobře splňuje. Jedinou silou působící na jablko je jeho síla tíže, takže $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, kde \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Je tedy $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Je to však síla tíže, kterou na své hlavě ucítí Newton? To jistě ne. Ze zkušenosti víme, že tato síla bude záviset na výšce, z které jablko spadlo, a je větší než síla tíže. Když se studenta dotážeme, co je to tedy za sílu a kde se bere, možná nám odpoví, že je to setrvačná síla. To je však síla, která byla definována v souvislosti s d'Alembertovým principem. Ten se v učebnicích nejčastěji vykládá jen povrchně. Prý stačí převést pravou stranu rovnice (3.1) na stranu levou, takže dostaneme $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$. D'Alembertův princip však nevzniká pouhým převedením jednoho členu rovnice na druhou stranu. Vytváří nový pojem setrvačné síly a má pro mechaniku dalekosáhlý význam. Ještě se k němu později vrátíme. Formálně můžeme poslední rovnici zapsat jako rovnici rovnováhy, když napíšeme

$$\mathbf{F} + \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} = -m\mathbf{a} = -m\mathbf{g}. \quad (3.2)$$

Symbol \mathbf{S} značí setrvačnou sílu. Síly \mathbf{F} a \mathbf{S} tvoří rovnovážný systém (jsou v rovnováze). Když se studenta zeptáme, co je to rovnováha, zpravidla nedostaneme uspokojivou odpověď. Jablko přece – a o jablko jde! – v rovnováze není, koná zrychlený pohyb. A jaký je rozdíl, jsou-li v rovnováze síly nebo je-li v rovnováze těleso? Protože víme, že na jablko působí pouze síla tíže \mathbf{F} , pak kde působí setrvačná síla \mathbf{S} ? Považujeme-li sílu tíže \mathbf{F} za akci, která působí ze Země na jablko, pak podle třetího New-

tonova zákona působí stejně velká síla, ale opačného smyslu, na Zemi. Jablko tedy Zemi nadlehčuje, ovšem tak málo, že to na polohu Země a její pohyb nemá žádný vliv. Kde má svůj protějšek setrvačná síla S ? Podle druhé z rovnic (3.2) působí setrvačná síla vzhůru, protože tíhové zrychlení působí dolů. Označíme-li setrvačnou sílu za akci, muselo by nahoře být nějaké těleso, na které by působila směrem dolů reakce (podle třetího Newtonova zákona). Tam však žádné těleso není. V prostoru spjatém se Zemí, který je velmi přibližně inerciální, není proto setrvačná síla vnější silou, jež by jakkoli působila na hmotu jablka. To však neznamená, že tato síla neexistuje. Je to objemová síla, kterou se těleso – obrazně řečeno – brání změně svého pohybového stavu, tedy zrychlení. Vzniká uvnitř tělesa a vnější pozorovatel na Zemi ji nemůže jako vnější sílu pozorovat. Kdyby to totiž byla vnější síla, byla by první z rovnic (3.2) podmínkou skutečné rovnováhy, při které je jablko vzhledem k Zemi v klidu, nepohybuje se. Tak tomu ovšem během pádu jablka není.

Vzijme se nyní do postavení červa uvnitř jablka. Ten neví, co se s jablkem děje. Až do začátku pádu jablka cítil, že je přitlačován svou tíží (ovšem nepatrnou) ke dnu své chodbičky. Během pádu jablka tento tlak zmizí, červ se bude cítit být ve stavu beztlíže. Pro něho bude setrvačná síla stejně reálná jako vnější síla tíže a jejich účinky se budou rušit, jak to vyjadřuje první z rovnic (3.2). Bude to tedy z jeho pohledu síla vnější. Kdyby toho byl schopen, mohl by si červ myslit, že jeho síla tíže byla uvedena do rovnováhy s novou gravitační silou, která na něho působí shora z nějakého velkého tělesa, takže výsledná síla na něho působící je nulová.* Setrvačná síla S se objevila v prostoru spjatém s jablkem jako vnější síla. Proto se setrvačná síla řadí k silám zjevným či *zjevným* (apparent forces). Prostor spjatý s jablkem, v němž se setrvačná síla jeví jako síla vnější, však není inerciální, takže o skutečnou rovnováhu nejde, rovnice (3.2) je ekvivalentní s rovnicí (3.1) a je to tedy pohybová rovnice, jakkoli formálně vypadá jako rovnice rovnováhy. V některých učebnicích se rovnice (3.2) označuje jako

* Ekvivalence účinků zrychlení a gravitace je ostatně jedním z pilířů obecné teorie relativity.

„rovnice dynamické rovnováhy“, což je protimluv, kterému je lépe se vyhnout. Pojem rovnováhy má tu vlastnost, že jej všichni užívají, ale jen málokdo jej umí definovat.

Setrvačná síla \mathbf{S} je po celou dobu pádu jablka rovna síle tíže \mathbf{F} (s opačným znaménkem). Proto to není síla, kterou ucítí Newton na své hlavě. Musíme sledovat, co se děje, když se jablko dotkne hlavy. Protože všechny vektory mají společnou vertikální vektorovou přímkou, budeme další rovnice psát už jenom ve skalárních složkách. Mezi Newtonovou lebkou a jablkem vznikne tlaková vnitřní reakce $R(t)$, která závisí na čase t . Působí spojitě rozložená v dotykové ploše na jablko nahoru, na lebku dolů. Pohybová rovnice (3.1) se po dopadu jablka na Newtonovu hlavu změní na tvar $-R(t) + F = -m\bar{a}(t) + mg$. Druhé členy na každé straně rovnice se zruší, takže bude

$$-R(t) - \bar{S}(t) = 0, \quad \bar{S}(t) = -m\bar{a}(t). \quad (3.3)$$

Zrychlení \bar{a} vzniká působením síly R a směřuje nahoru, je to tedy zpoždění padajícího jablka, které je velké a za velmi krátký čas jablko zastaví. Výsledné zpoždění jablka bude tedy $a = \bar{a} - g$. V okamžiku, kdy se jablko zastaví, nabývá síla R maxima. Jablko se pak od lebky odrazí vzhůru. Setrvačná síla \bar{S} , která působí dolů, je v tomto okamžiku mnohem větší než síla tíže, a tedy než setrvačná síla S (v absolutní hodnotě). Je to však ona, která působí na Newtonovu hlavu? Není! Setrvačná síla je objemová, kdežto na hlavu působí síla povrchová. Je to reakce $R(t)$. Její časový průběh závisí na deformačních vlastnostech jablka a lebky. Výpočet této síly už spadá do teorie rázu, k němuž se ještě vrátíme.

Příklad padajícího jablka je analogický s pádem parašutisty, který vyskočil z letadla. Síla tíže $F = mg$ mu uděluje zrychlení g . Když na tuto pohybovou rovnici aplikujeme d'Alembertův princip, dostaneme $F + S = 0$, $S = -mg$. Kdyby setrvačná síla S byla skutečná síla, vyrovnala by účinek síly F (jejich součet je nulový) a žádný volný pád by se nekonal. Jistěže nikdo nebude tvrdit, že na volně padající těleso působí skutečná síla S (stejně velká jako tíže) směrem vzhůru! Jenže když se vžijeme do parašutisty,

který právě vyskočil z letadla, pak ten pocítí v prvních okamžicích po výskoku svůj stav skutečně jako stav beztlíže. Pro něho je síla S silou zjevnou, a nikoli setrvačnou (jeho relativní rychlost k unášenému prostoru je totiž nulová, takže druhotné zrychlení je rovněž nulové) a povaha této síly je stejná jako povaha každé jiné akční síly. Vnímá ji jako reálnou vnější sílu, která skutečně kompenzuje vliv tíže. Pocit vlastní tíže se parašutistovi vrátí teprve, když se mu otevře padák.

Rovnováha ve statice, dynamice a termodynamice

Prolistujeme-li učebnice fyziky a mechaniky, ať už středoškolské nebo vysokoškolské, a ovšem i různá skripta, najdeme slovo „rovnováha“ v nejrůznějších souvislostech. Jde například o rovnováhu sil, hmotných bodů, jejich soustav, o rovnováhu těles, o rovnováhu statickou, dynamickou, relativní, relativní klidovou, labilní, indiferentní a stabilní, rovnováhu v kapalině, rovnováhu tepelnou a termodynamickou. Hledáme-li však definici pojmu „rovnováha“, zpravidla nenajdeme nic. Nějak se předpokládá samozřejmá znalost tohoto pojmu, kterou dítě získává od maminky, když se učí mluvit. Živý jazyk má však pro tento pojem i další, sice názorné, avšak v mechanice sotva využitelné významy. Třeba opilec, který vrávorá, a přece neupadne, si zachoval svou rovnováhu. Podíváme-li se do některého z naučných slovníků, dovíme se ještě více. Například v Malém naučném slovníku, který vydal nakladatel B. Kočí roku 1925, se píše, že „rovnováha je smysl, jímž se spravují pohyby a postavení hlavy a tím vzpřímený stoj i chůze. (...) Rovnováha sil tělesných i duševních je podle Alfreda Fouilléa podmínkou zdravého vývoje duševního a odtud důležitost i tělesné výchovy. Rovnováha ve fyzice je stav, kdy síly působící na těleso se navzájem ruší. Rovnováha dynamická je stav, při němž se dějí v soustavě stálé změny, ale tak, že celkový stav se nemění.“

Napadne nás, že bychom uspokojivou definici měli hledat spíše ve speciální literatuře. Tou je dozajista anglicko-český terminologický slovník teorie strojů a mechanismů, uveřejněný v prvním čísle Bulletinu České společnosti pro mechaniku v roce 1998. V něm je uvedena tato definice rovnováhy: je to „stav soustavy sil a silových dvojic, kdy výsledná síla a výsledná silová dvojice jsou současně rovny nule“. Pozoruhodné je, že v anglické verzi je toto heslo nadepsáno „EQUILIBRIUM“, kdežto v českém překladu je nadpis „ROVNOVÁHA SIL“. Autoři českého překladu si tedy byli vědomi určité slabiny anglické verze a nadpis upravili. Později ukážeme proč.

Podle posledně uvedené definice je tedy rovnováha vlastností soustavy sil. Nic se tam neříká o tom, jak a nač tyto síly působí. Pak ovšem tato definice ztrácí smysl. Čtenář, který by o rovnováze nic nevěděl a hledal v této definici poučení, určitě by nezmoudřel. Kromě toho se z takové definice nedají odvodit druhy rovnováhy (stabilní, indiferentní, labilní). Síly nikdy nepůsobí samy o sobě, ale vždy mezi tělesy. Kdyby nebylo těles, nebylo by ani sil. Rovnováha v mechanice musí být proto pojmem vztahujícím se na tělesa, a nikoli na síly. To, co je uvedeno v citovaném slovníku, je ve skutečnosti definice *rovnovážné soustavy sil (a silových dvojic)*, která – pokud působí na určité tuhé těleso – neovlivní jeho pohybový stav. Vyjádříme-li tuto definici v matematické formě, dostaneme *podmínky rovnováhy*. To je něco jiného než rovnováha.

Možná nám pomůže, vrátíme-li se o jedno století zpět. Například Augustin Föppl, profesor Technické vysoké školy v Mnichově, vydal své přednášky o technické mechanice v šesti svazcích. V úvodním svazku z roku 1905 se o tělesech pohybujících se v inerciálním prostoru píše: *O tuhém tělese říkáme, že je v rovnováze, když je buď v klidu anebo koná posuvný přímočarý pohyb s konstantní rychlostí. Od rovnováhy tělesa je však třeba přísně odlišit rovnováhu sil na něj působících. O daných silách totiž také říkáme, že se udržují v rovnováze, když další pohyb tělesa se děje přesně tak, jako kdyby zmíněné síly na něj nepůsobily.*

Na této definici je pozoruhodné, že se omezuje na tuhá tělesa jsoucí v klidu nebo konající rovnoměrný translační pohyb. Rovnováha se zde definuje jako zvláštní *pohybový stav tuhého tělesa*. To znamená, že například rovnoměrně rotující setrvačnick, i když na něj působí pouze rovnovážná soustava sil, v rovnováze není! Přijmeme-li tuto definici, pak jejím důsledkem je, že *každá část tělesa jsoucího v rovnováze je rovněž v rovnováze*. Toho se využívá v mechanice poddajných těles (z tělesa uvolňujeme myšlenými řezy nekonečně malé elementy a píšeme pro ně podmínky rovnováhy). To, že se Föppl nejprve omezuje jen na tuhá tělesa, umožňuje stručnou formulaci definice. Jinak by se musela připojit podmínka statického (tj. velmi pomalého) přikládání rovnovážné soustavy sil, aby nedošlo k rozkmitání

tělesa, a tím k porušení rovnováhy. Tento pojem *rovnováhy tělesa* Föppl rozlišuje od pojmu *rovnováhy sil*. Tím rozumí jejich rovnovážnou soustavu. I kdybychom tedy přijali pojem *rovnováha sil*, musili bychom slovník doplnit ještě o definici *rovnováhy tělesa*.

Föppl se dále v této kapitole věnované rovnováze zamýšlí nad působením sil, které dělí na povrchové a objemové. Protože síly působí jen mezi tělesy, a to podle zákona akce a reakce, můžeme si představit tělesa rozdělená na velmi malé částičky, „hmotné body“, a síly mezi dvěma takovými částičkami znázornit dvěma osamělými (koncentrovanými) silami působícími na spojnici obou bodů, stejně velkými, ale opačných smyslů. S touto představou však vždy nevystačíme. Rozdělíme-li například tyčový magnet na malé částičky, bude se každá z nich chovat jako úplný magnet, což znamená, že má dva póly, takže k její reprezentaci potřebujeme dva body. Abychom i tyto případy jednoduše postihli, můžeme zákon o akci a reakci modifikovat tak, že sloučíme akce i reakce působící mezi dvěma tělesy do jedné soustavy sil, která by působila na jedno tuhé těleso (například na takové, které vznikne tuhým spojením obou zmíněných vzájemně působících těles), a tato soustava by byla v rovnováze (šlo by tedy o rovnovážnou soustavu sil). A pak je jedno, jde-li o síly povrchové nebo objemové (např. gravitační, magnetické nebo elektrické či elektromagnetické). Poznamenejme, že Föppl považoval pojem rovnováhy za natolik důležitý, že mu věnoval samostatnou kapitolu o třinácti stránkách.

Abychom se vyhnuli dvojznačnosti definice, o které se zmiňuje Föppl, budeme pod pojmem „rovnováha“ rozumět v této práci rovnováhu tělesa. Pojem „rovnováha sil“ nahradíme pojmem „rovnovážná soustava sil“. Někteří čtenáři mohou mít dojem, že autor hledá – obdobně jako středověcí scholastikové – uzel na prutu rákosky. Vždyť *rovnováha* je pojem každému intuitivně jasný, o kterém není třeba planě filosofovat. Už René Descartes kritizoval filozofy, kteří definovali *pohyb* jako „čin býti v potencialitě, pokud jest v potencialitě“ (motum esse actum entis in potentia, prout est in potentia), a tvrdil, že jde o pojem jasný každému dítěti. Autor má pro takové stanovisko plné pochopení, sám totiž musil kdysi poslouchat v povinném

školení z marxistické filosofie dvouhodinový výklad o tom, že při pohybu těleso v určitém místě zároveň je i není, což byl příklad dialektiky. Myslí si však, že na intuici se lze spoléhat jen do určité míry. Učíme-li studenty, jak napsat podmínky rovnováhy, měli bychom jim také jednoznačně vysvětlit, co to rovnováha (v mechanice) je.

Zmínili jsme se o tom, že rovnoměrně rotující setrvačnický není v rovnováze, ačkoli na něj působí rovnovážná soustava sil (síly tíže a reakce v ložiskách). Je to logické, protože elementy tohoto setrvačnicku konají rovnoměrný pohyb po kruhové dráze s dostředivým zrychlením. Předpokládejme pro jednoduchost, že věnec setrvačnicku je relativně tenký, tzn. radiální rozměr jeho průřezu je zanedbatelný proti poloměru r jeho střednice. Zanedbáme i vliv ramen, které působí ohyb věnce, protože ohybová napětí bývají malá. Pak bude tahové napětí v průřezu věnce rozděleno přibližně rovnoměrně. Ve věnci tedy bude relevantní pouze konstantní tahové napětí σ . Touto idealizací dostáváme model volného rotujícího věnce, jak jej známe z úvodních partií technické teorie pružnosti. Element takového věnce uvolněný dvěma radiálními řezy, svírajícími úhel $d\varphi$, je znázorněn na obr. 4.1. Hmotnost elementu je $\rho S r d\varphi$, kde S je průřez, ρ hustota. Původně vnitřní síly σdS se myšleným rozříznutím věnce staly vnějšími, a tedy přístupnými naší analýze. Jejich výslednice $\sigma S d\varphi$ směřuje do středu otáčení a uděluje hmotě elementu dostředivé zrychlení $\omega^2 r$, takže pohybová rovnice elementu o hmotnosti $\rho S r d\varphi$ bude

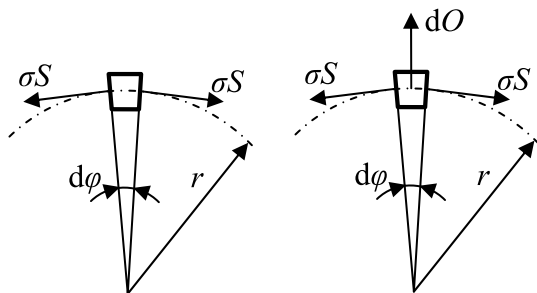
$$\sigma S d\varphi = \rho S r d\varphi \cdot \omega^2 r. \quad (4.1)$$

Odtud dostáváme známý vzorec pro napětí v rotujícím věnci (prstenci) $\sigma = \rho \omega^2 r^2$. Vzpomeneme-li si na d'Alembertův princip, můžeme rovnici (4.1) zapsat ve tvaru

$$\sigma S d\varphi - \rho S r d\varphi \cdot \omega^2 r = 0. \quad (4.2)$$

V tomto případě je rozdíl v obou rovnicích pouze formální, ale jejich interpretace je rozdílná. V rovnici (4.2) považujeme totiž výraz $dO = \rho S r d\varphi \cdot \omega^2 r$ za *odstředivou sílu* (obr. 4.2). Odstředivá síla dO působí v opačném směru než dostředivé zrychlení $\omega^2 r$, je to tedy setrvačná síla.

Představa, že věnec je rozpínán za rotace odstředivou silou, je pro laika přijatelnější, než že se tak děje vnitřním obvodovým napětím. Mezi silami na obr. 4.2 je však rozdíl. Zatímco síly σS působí ze sousedních průřezů věnce podle zákona akce a reakce, pak odstředivá síla dO takový protějšek nemá. Není to proto vnější fyzikální síla, z vnějšího pohledu je to vnější síla pouze zdánlivá. Soustava těchto tří sil (dvou skutečných a jedné zdánlivé) tvoří rovnovážný systém, který by bylo pošetilé nazývat rovnováhou. Přesto se rovnice (4.2) v mnoha učebnicích označuje jako *rovnice dynamické rovnováhy*. Již jsme uvedli, že je lépe se tomuto pojmu vyhnout. Nelogičnost tohoto názvu je patrná také z toho, že dynamická rovnováha je rovněž rovnováha.* Pak by těleso, které by bylo v klidu nebo konalo jakýkoli pohyb, bylo vždy v rovnováze – buď statické, nebo dynamické. Tím by pojem „rovnováha“ ztrácel smysl. V dynamice bychom měli vždy hovořit pouze o *pohybových rovnicích*, ať už je odvodíme jakýmukoli způsobem.



Obr. 4.1

Obr. 4.2

Zapomeneme-li na to, že setrvačná odstředivá síla není v inerciálním prostoru skutečnou vnější silou, můžeme ji podělit hmotností elementu a dostat tak „odstředivé zrychlení“ $\gamma = \omega^2 r$. Ihned vidíme, že je to nesmysl. Vektor rychlosti elementu se otáčí vždy ke středu křivosti dráhy, takže normálové zrychlení je vždy jen dostředivé. To platí pro jakýkoli pohyb po jakkoli zakřivené dráze. Přesto se v mnoha učebnicích fyziky a geofyziky vykládá vliv zemské rotace na tíhové zrychlení tak, že se vektorově skládá

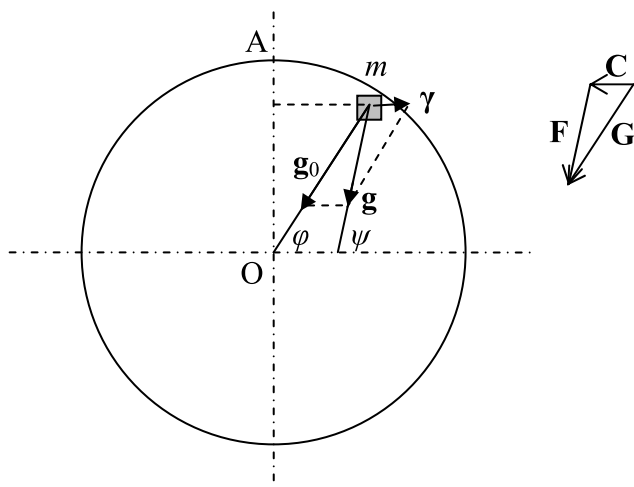
* Dělit rovnováhu na *rovnováhu* a *dynamickou rovnováhu* má stejnou logiku jako dělit v politické ekonomii hodnotu výrobku na *hodnotu* a *nadhodnotu*.

gravitační zrychlení \mathbf{g}_0 s „odstředivým zrychlením“ γ na výsledné tíhové zrychlení \mathbf{g} podle obr. 4.3. Je-li R poloměr Země (kterou si pro zjednodušení nahrazujeme koulí), pak $\gamma = \omega^2 R \cos\varphi$. Symbolem ω jsme označili úhlovou rychlost Země, která rotuje kolem osy OA. Vektor \mathbf{g}_0 směřuje do středu Země, kdežto vektor \mathbf{g} je poněkud odkloněn a určuje pravou vertikálu. Úhel ψ , který svírá tato vertikála s rovinou rovníku, stanoví zeměpisnou (geografickou) šířku pozorovacího místa, jež je poněkud větší než zeměměřdná (geocentrická) šířka φ . Výjimku tvoří rovník a póly, kde obě šířky souhlasí. Rozdíl obou označíme $\varepsilon = \psi - \varphi$. Lze snadno ukázat, že $0 \leq \varepsilon \leq 5'56''$, takže přibližně položíme $\varepsilon \approx 0$. Potom dostaneme pro tíhové zrychlení jednoduchý přibližný vzorec

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \omega^2 R \cos^2 \psi. \quad (4.3)$$

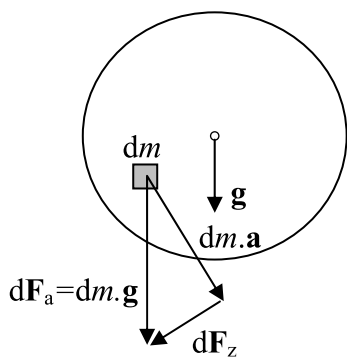
Vzorec je sice správný, ale jeho odvození chybné. Zrychlení γ je totiž dostředivé, takže by mělo být na obr. 4.3 zakresleno s opačným smyslem. Na hmotu m v pozorovacím místě působí gravitační síla \mathbf{G} o velikosti $G = g_0 m$. Protože Země rotuje, musí na hmotu m působit dostředivá síla \mathbf{C} o velikosti $C = m\omega^2 R \cos\psi$. Avšak jediná síla, která na hmotu m skutečně působí, je gravitační síla \mathbf{G} , která proto musí mít nenulovou složku kolmou k ose rotace. Síla \mathbf{G} má vskutku vektorové složky \mathbf{F} a \mathbf{C} . Pozorovaná síla tíže \mathbf{F} ($F = mg$) je tedy dána vektorovým rozdílem obou jmenovaných sil, takže $\mathbf{F} = \mathbf{G} - \mathbf{C}$. Po krácení hmotností m a rozepsáním do skalárních složek odtud dostaneme rovnici (4.3).

Využijeme-li d'Alembertova principu, pak můžeme místo dostředivé síly \mathbf{C} zavést setrvačnou odstředivou sílu $-\mathbf{C}$. D'Alembertův princip se však týká sil, a nikoli zrychlení. Zavádět do výpočtu odstředivé zrychlení je proto hrubě nesprávné. Odstředivá síla se spolu se silou \mathbf{G} vektorově složí na sílu tíže \mathbf{F} . Formálně to znamená, že rovnici $\mathbf{F} = \mathbf{G} - \mathbf{C}$ zapíšeme ve tvaru $\mathbf{F} = \mathbf{G} + (-\mathbf{C})$. Zdálo by se, že d'Alembertův princip je pouze triviální úprava pohybové rovnice. Ale tak tomu zdaleka není, ačkoli se to téměř ve všech učebnicích mechaniky pouze takto vykládá. Ukážeme jeho obecnější formulaci.



Obr. 4.3

D'Alembertův princip vysvětlíme na příkladu rovnoměrně rotujícího volně padajícího tělesa znázorněného na obr. 4.4. Na hmotný element dm působí akční síla tíže $d\mathbf{F}_a$. Výsledné zrychlení \mathbf{a} elementu však nepůsobí svisle, ale šikmo. Skládá se ze zrychlení tíhového a dostředivého. To znamená, že z vnější síly $d\mathbf{F}_a$ se vlivem vnitřní vazby mezi hmotnými částicemi uplatní na vzniku zrychlení pouze část $dm \cdot \mathbf{a} = d\mathbf{F}_a - d\mathbf{F}_z$. Síla $d\mathbf{F}_z$ je pro zrychlení elementu ztracená. D'Alembertův princip říká, že *ztracené síly* $d\mathbf{F}_z = d\mathbf{F}_a - \mathbf{a}dm$ tvoří rovnovážný systém. To znamená, že rovnovážný systém tvoří akční síly $d\mathbf{F}_a$ spolu se setrvačnými silami $d\mathbf{S} = -\mathbf{a}dm$. Takže $\int d\mathbf{F}_z = \int (d\mathbf{F}_a - \mathbf{a}dm) = \int (d\mathbf{F}_a + d\mathbf{S}) = \mathbf{0}$. Rozumí se tím všechny takové síly v soustavě, tedy součet přes všechny elementy dm . Ve svém důsledku vede d'Alembertův princip k závěru, který známe z běžných učebnic: *akční síly doplněné o setrvačné síly tvoří v soustavě rovnovážný systém, s kterým lze zacházet stejně jako ve staticce*. To znamená, že setrvačnou sílu lze považovat *jakoby* za skutečnou vnější sílu, avšak s tím omezením, že soustava akčních a setrvačných sil smí působit pouze *staticky* (je rovnovážná). V tomto případě jde o rovnovážnou soustavu sil, nikoli o rovnováhu tělesa. Výsledkem je soustava diferenciálních rovnic, zatímco ve staticce, kde jde také o rovnováhu tělesa, je výsledkem soustava algebraických rovnic.



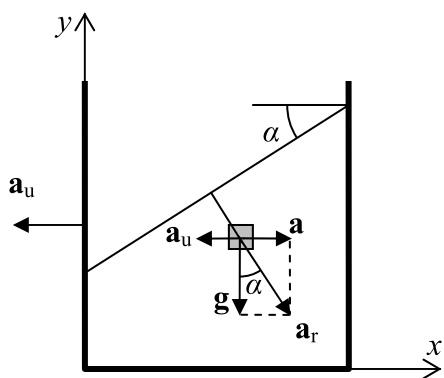
Obr. 4.4

Vnucuje se proto otázka, proč bychom měli na obvyklém výkladu tohoto principu cokoli měnit. K tomu nás vede pouze úcta k d'Alembertovu génio. Cílem jeho snah nebylo přeskupování členů v pohybové rovnici, ale studium úlohy setrvačných sil a také studium vlivu vnitřních vazeb v soustavě na zrychlující účinky akčních sil. Kdo tuto pohnutku nechápe, nemusí k našemu výkladu přihlížet.

Bylo by možné namítnout, že je zbytečné bránit se vžitému pojmu *odstředivé zrychlení*, když jeho aplikace vede ke správným výsledkům. Ano, jistě, už Heaviside prý odpovídal svým oponentům, kteří jeho operátorovému počtu vytýkali nedostatek rigoróznosti: *Proč bych měl zkoumat, jak mi tráví žaludek, když mi tráví dobře!* Odstředivé zrychlení musíme prý chápat z hlediska relativního pohybu. Když na roztočenou gramofonovou desku přilepíme malou kuličku, bude s hlediska pozorovatele spjatého s gramofonovou deskou v klidu. A když ji uvolníme, bude konat zrychlený relativní pohyb od středu rotace. Bude mít tedy odstředivé zrychlení. Jenže tak jednoduché to není. Uvolněná kulička se bude vlivem Coriolisova zrychlení okamžitě stáčet a její pohyb v rovině gramofonové desky bude křivočarý. V inerciálním prostoru bude konat přímočarý rovnoměrný pohyb rychlostí, kterou měla v okamžiku uvolnění, a ta je kolmá k radiálnímu průvodiči! Tak jaképak odstředivé zrychlení?

Také pojem *relativní rovnováhy* v kapalině je v literatuře vykládán většinou nesprávně. Obvykle se naklonění hladiny kapaliny konající spolu

s nádobou ustálený, vodorovný, přímočarý a rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb vysvětluje tak, že se k tíhovému zrychlení \mathbf{g} vektorově přičte tzv. doplňkové zrychlení $\mathbf{a} = -\mathbf{a}_u$ (obě zrychlení jsou stejně velká, ale opačného smyslu). Připojujeme tedy unášivé zrychlení \mathbf{a}_u nádoby s opačným smyslem, což je paradoxně zpždění (!). Hladina je kolmá k výslednému zrychlení $\mathbf{a}_r = \mathbf{a} + \mathbf{g}$, takže svírá s vodorovnou rovinou úhel, jehož tangenta je dána vztahem $\operatorname{tg} \alpha = a/g$ (obr. 4.5). Odvození tohoto správného vzorce úplně zastírá fyzikální podstatu jevu, protože do výpočtu zavádí neexistující doplňkové zrychlení.



Obr. 4.5

Ve skutečnosti konají všechny částice kapaliny při ustáleném pohybu rovnoměrný zrychlený pohyb, takže jejich jediné zrychlení je \mathbf{a}_u . Pro jednu takovou částici, pravoúhlý element o objemu $dx dy dz$, napíšeme pohybové rovnice. Vybrali jsme jej v povrchové vrstvě kapaliny. Budeme předpokládat, že se posuvný rovnoměrně zrychlený pohyb děje ve směru proti kladné ose x . Pak se na element musí přenášet zrychlující síla o velikosti dF , pro niž dostáváme rovnici (obr. 4.6)

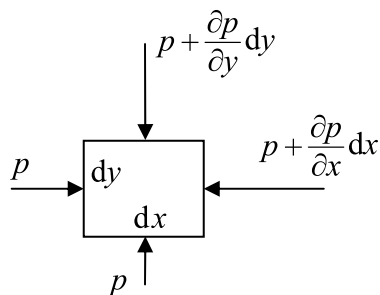
$$dF = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - p dy dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (4.4)$$

Tato síla uděluje elementu o hmotnosti $\rho dx dy dz$ zrychlení a_u , takže složka tlakového gradientu ve směru osy x má velikost $\partial p / \partial x = \rho a_u$. Ypsi-

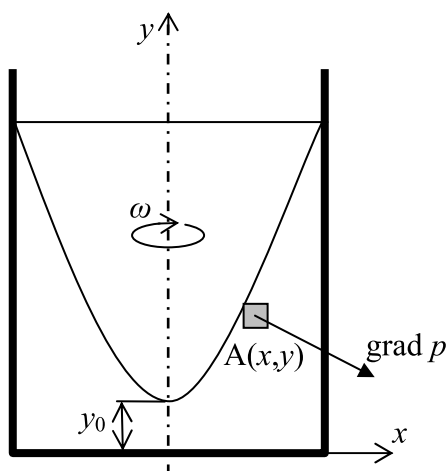
lonová složka téhož gradientu vychází z podmínky, že vztlaková síla $-(\partial p/\partial y)dydx dz$ vyvažuje sílu tíže $\rho g dx dy dz$, takže $\partial p/\partial y = -\rho g$. To jsou dvě složky vektoru $\text{grad } p$ (třetí složka do směru osy z je nulová). Tento gradient svírá s osou y stejný úhel α jako hladina s osou x (jde o úhly s rameny navzájem kolnými, gradient tlaku p je kolmý k hladině). Proto

$$\text{tg } \alpha = \frac{\partial p/\partial x}{-\partial p/\partial y} = \frac{\rho a_u}{\rho g} = \frac{a_u}{g}. \quad (4.5)$$

Je to výsledek shodný s předešlým, ale vychází z fyzikálního modelu, do kterého nezavádí žádné nové neexistující „doplňkové“ zrychlení. Jde o snadno zdůvodnitelný poznatek, podle kterého je hladina kolmá ke gradientu tlaku (k vektoru $\text{grad } p$).



Obr. 4.6



Obr. 4.7

Obdobná poznámka se týká i odvození rovnice rotačního paraboloidu, který vytváří hladina v rotující nádobě. V literatuře se často zcela zbytečně a nesmyslně zavádí neexistující „odstředivé“ zrychlení. Fyzikální výklad by měl podle autorova názoru opět vycházet ze skutečnosti, že hladina je kolmá ke gradientu tlaku. Jeho složky vypočteme obdobně jako v předchozím příkladu. Zvolíme-li souřadnicové osy tak, že osa y se shoduje s osou rotace a osa x směřuje radiálně (obr. 4.7), pak pro okrajový element kapaliny (u hladiny) v bodě $A(x, y)$ platí stejný rozbor působení tlaků jako u nádoby

s translačním zrychleným pohybem, ovšem s tím rozdílem, že místo unášívého zrychlení a_u budeme mít dostředivé zrychlení $\omega^2 x$. Takže bude

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial p / \partial x}{-\partial p / \partial y} = \frac{\rho \omega^2 x}{\rho g} = \frac{\omega^2 x}{g}. \quad (4.6)$$

Integrací odtud dostaneme rovnici paraboly, která je řezem hledaného rotačního paraboloidu rovinou x, y :

$$y - y_0 = \omega^2 x^2 / 2g. \quad (4.7)$$

Nakonec připojíme ještě velmi jednoduchý příklad aplikace d'Alembertova principu, na kterém názorně ukážeme, jaké chyby se můžeme dopustit při sestavování energetické bilance mechanické soustavy. Zvolíme případ kmitání hmoty m na pružině o tuhosti k . Výchylka z rovnovážné polohy x a budící síla F jsou funkcemi času t . Pohybová rovnice, jak známo, je

$$m\ddot{x} + kx = F. \quad (4.8)$$

Tuto rovnici vynásobíme $dx = \dot{x}(t) dt$. Dostaneme

$$m\ddot{x}\dot{x}dt + kx dx = F dx. \quad (4.9)$$

Po integraci dostaneme energetickou bilanci

$$T + V = A_F, \quad (4.10)$$

v které $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ značí kinetickou energii, $V = \frac{1}{2}kx^2$ potenciální energii uloženou v pružině a $A_F = \int F dx = \int F(t)\dot{x}(t)dt$ práci vykonanou vnější silou F .

Použijeme-li d'Alembertova principu, tj. kmitání budeme posuzovat z hlediska pozorovatele spjatého s hmotou m , bude se nám setrvačná síla $S = -m\ddot{x}$ jevit jako vnější síla, která je v rovnováze s ostatními silami působícími na tuto hmotu. Místo (4.8) dostaneme

$$kx = F + S. \quad (4.11)$$

Rovnice (4.8) a (4.11) se liší jenom formálně, ale tento rozdíl má důležitý důsledek na energetickou bilanci. Místo rovnice (4.10) dostaneme

$$V = A_F + A_S. \quad (4.12)$$

To znamená: započítáme-li do energetické bilance kinetickou energii T , nesmíme do ní zahrnout práci setrvačných sil A_S a naopak. Podle autorovy zkušenosti zhřešil proti této zásadě i jeden vysokoškolský učitel.

Je zajímavé, že v termodynamice se s pojmem rovnováhy zachází mnohem uvážlivěji. Definice termodynamické rovnováhy a tepelné rovnováhy jsou v učebnicích – alespoň pokud je autorovi známo – uváděny konzistentně a srozumitelně, bez umělých obrátů. Proto se jimi nebudeme zabývat.

Jak daleko je dnešní mechanika od Babylonské věže?

Dnešní školy dosud málo vedou své studenty k samostatné práci s odbornou literaturou. Je možné, že toto tvrzení neplatí o všech oborech, avšak o těch, kde se učí mechanika, platí – podle autorových zkušeností – určitě. Studentům se zpravidla předkládají k osvojení ty verze mechaniky, k nimž jejich učitele dovedl často křivolaký vývoj jejich života, katedry, školy. Každá škola má svá skripta (na Slovensku bychom možná řekli „svá specifika“), kde je mechanika prezentována neměnnými metodami v neměnné posloupnosti témat, pojmů, principů, zákonů, vět, příkladů. Eufemisticky se tomu říká tradice. Neříkáme, zda dobrá nebo špatná.

Vnímavý a zvědavý student může dojít časem k poznání, že by si měl obzor rozšířit; k tomu stačí mnohdy zcela elementární zkušenost, že z kuráku se orel nevznese. Sáhne-li pak po světové literatuře, dočká se nemilého překvapení. Ve vědě tak tradiční a podle názoru mnohých fyziků – modernistů a postmodernistů – hotové a uzavřené, jakou je klasická a technická mechanika, dodnes existují nejasnosti a zmatení jazyků.

Nevěříte? Uvedeme příklad. Věta o zachování momentu hybnosti je v angličtině principem zachování úhlové hybnosti (principle of conservation of angular momentum) – v lepším případě momentu hybnosti (moment of momentum). Ve francouzštině jde o princip zachování kinetického momentu (principe de la conservation du moment cinétique). V němčině je to věta o zachování točivého impulsu (Drehimpulserhaltungssatz) a v ruštině princip zachování hlavního momentu množství pohybu (princip sochraneni-ja glavного momenta količestva dviženi-ja). Nehledě k různému pojmosloví – je to věta nebo princip?

Náš pomyslný vnímavý a zvědavý student se rozhodne jít ke kořenům své exaktní vědy. Protože základem mechaniky jsou proslulé Newtonovy zákony, začne u Newtona. Ale chyba lávky! Studovat spisy ze sedmnáctého a osmnáctého století je proklatě namáhavá práce. Jestliže autoři psali rodným jazykem, používali pro fyzikální pojmy běžných hovorových termínů,

a to nejednotně. V latině to bylo možná o trochu lepší, ale kdopak dnes ještě tento mrtvý jazyk doopravdy ovládá? Ostatně, posuďte sami. Co je to síla (vis)? Podle Newtona (1643–1727) je to nejprve příčina pohybu, potom následek pohybu. Podle Descartese (1596–1650) je to množství pohybu (hmotnost krát rychlost), podle Leibnize (1646–1716) dvojnásobek kinetické energie (hmotnost krát kvadrát rychlosti). Později se pojem síly sjednotil, ale jeho definice zůstaly velmi dlouho nepřesné a zavádějící.

Nehorázných překvapení se dožijeme i ve století dvacátém. Například R. Laemmel tvrdil ve své knize [LAEMMEL (1957)], že Newtonův druhý zákon není žádnou poučkou (Lehrsatz), ale pouhou definicí síly. Kdyby to byla pravda, byla by mechanika tautologií, a nikoli vědou.

Vraťme se k Newtonovi. Jeho tři zákony (tres leges) jsou uvedeny v knize *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Znamená to snad, že jeho tři zákony jsou vlastně principy? Náš student ze školy ví, že např. druhý Newtonův zákon znamená rovnost síly se součinem hmotnosti a zrychlení, tedy

$$F = ma . \tag{6.1}$$

Zde se pod symbolem m zpravidla rozumí hmotnost „hmotného bodu“, a je jeho zrychlení a F síla, která na hmotný bod působí. Pomiňme skutečnost, že pojem „hmotný bod“ nebývá v učebnicích náležitě definován ani vysvětlen (za takový bod bývá považována nejen malá kulička, ale i Slunce) a že tento tvar Newtonova zákona předpokládá nezávislost hmotnosti na čase. Tento Newtonův zákon prostě v Newtonově knize nenajdeme. Není tam žádné zrychlení, žádná hmotnost, ba není tam vůbec žádná matematická formule. Je tam jen věta začínající takto: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae...*, což znamená „Změna pohybu (správně by mělo být *quantitas motus*, množství pohybu, což je součin hmotnosti a rychlosti, tedy hybnost) je úměrná působící síle (*vis motrix*) a uskutečňuje se podél přímky, v níž tato síla působí“. Zamyslíme-li se nad touto větou, najdeme i odpověď, jak tuto větu matematicky formulovat. *Mutationem motus* totiž znamená změnu hybnosti, tedy rozdíl hybností ve dvou polohách pohybu, což je zase hybnost ($\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Vztáhneme-li zákon na případ

translačního pohybu tělesa o hmotnosti m (vůbec to tedy nemusí být „hmotný bod“), a to z klidu v okamžiku $t = 0$ a za působení konstantní síly F , pak Newtonova věta zvaná *lex sekunda* odpovídá rovnici

$$Ft = mv \quad (6.2)$$

nebo – připustíme-li časovou proměnlivost velikosti síly F –

$$F(t)dt = d(m(t)v(t)). \quad (6.3)$$

Newton se však použití diferenciálů vyhýbá a dokonce nepředpokládá změnu směru síly, ačkoli v aplikacích s proměnlivostí síly počítá.

A jak je to se zákony a principy? Slovo „principium“ znamená „začátek“. Postupně se slova *princip* začalo používat k označení obecného základního zákona, z něhož lze odvodit řadu zvláštních zákonů (z téhož širokého vědního oboru). Proto je např. na místě říkat „princip virtuálních prací“, neboť z něho lze odvodit zákony, jimiž se řídí rovnováha těles. Podobně z Hamiltonova principu lze odvodit pohybové zákony atd. Zákon v přírodních a technických vědách je slovní nebo početní vyjádření určité pravidelnosti, poznatek odvozený z chování přírody.

V matematice se místo z principů vychází z axiomů. Na axiomech je založena i teoretická mechanika. *Axiom* je nedokazatelný, ale každému rozumně uvažujícímu člověku zřejmý prvotní předpoklad. Z axiomů se dedukcí odvozují a dokazují věty. Pomocná věta, zvláště a mimo hlavní souvislost odvozená, je *lemma*. Stereotypní výpočetní postup se často označuje jako *pravidlo* nebo *schéma* (např. Cramerovo pravidlo, Hornerovo schéma). Kromě toho se v mechanice i v matematice setkáváme s pojmem *postulát*, což je základní předpoklad, který – na rozdíl od axiomu – nemusí být zcela zřejmý; jde o požadavek, který klademe předem (uvedme např. postuláty o racionálním jednání v teorii her). Podaří-li se v některém oboru shrnout zákony do několika málo principů, vytvářejí tyto principy *teorii*. Příkladem může být Maxwellova teorie elektromagnetického pole. Nestačí-li dosavadní poznatky k vybudování ucelené teorie, lze si vypomoci *hypotézami* (domněnkami). Hypotézy mohou být později dalšími pokusy buď potvrzeny, nebo vyvráceny.

Newtonova kniha tedy obsahuje „Matematické začátky přírodní filosofie“, a žádné principy, ale zákony. Nicméně pojmy, které jsme zde uvedli, tvoří neostrou množinu. Je např. zachování energie principem nebo zákonem? Tuto otázku nelze jednoznačně rozhodnout, záleží na souvislostech a také na zvyklostech. A jak označit třeba stavovou rovnici nebo Bernoulliho rovnici? Např. sčítanci vstupující do Bernoulliho rovnice

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konst} \quad (6.4)$$

mají rozměr délky (metr), ale je to bilance plynoucí z principu zachování energie. Měli bychom možná mluvit spíše o zákonu. Přesto se v učebnicích uvádí jen jako *rovnice*.

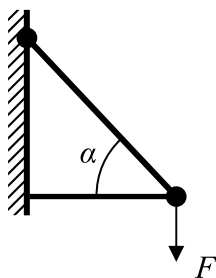
Mechanika je věda mladá a neuzavřená. Stále ještě v ní přetrvávají zbytky pojmového chaosu, z něhož se rodila. To nikterak neumenšuje obdivuhodný intelektuální výkon jejich tvůrců. Sjednocování pojmů a jejich definic bylo obtížným a dlouhodobým procesem, který ani dnes není ještě zcela zakončen.

Musíme být proto tolerantní k aplikaci pojmů, které potřebujeme, abychom se domluvili. Epistemolog Karl R. Popper říká: *Neměli bychom se snažit být přesnější, než to povaha našeho problému vyžaduje* (One should never try to be more precise than the problem situation demands). Snaha o přílišnou přesnost bývá na úkor jasnosti. Tuto jasnost je však třeba mít neustále na zřeteli. K jasnosti nepřispívá, používá-li autor označení samoúčelná, nezvyklá a neobjasněná, dodává-li slovům jiný než ustálený význam a zejména používá-li k označení téhož pojmu na různých místech textu různé výrazy. Je-li tedy něco pro nás principem, musí to být principem vždy. Tuto zásadu můžeme – chceme-li – považovat za zákon odvozený z principu mravního. Cítíte tu neodstranitelnou pojmovou neostrost?

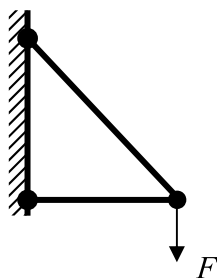
Málo platné, u klasiků naší vědy exaktní formulace vyhovující dnešním nárokům nehledejme. Bude-li náš pomyslný vnímavý a zvědavý student upřímný, musí zvolat, že Newtonův zákon ve tvaru (6.1) v Newtonově spise nenašel. Právě tak nenajde ani rovnici (6.4) ve spise Bernoulliho. Musí – po vzoru dítěte z Andersenovy pohádky – prohlásit, že král, o němž všichni prohlašují, že má nové šaty, je ve skutečnosti nahý.

Rozumějí fyzikové klasické mechanice?

V jedné středoškolské učebnici se v kapitole o vektorovém skládání sil požaduje, aby student vypočítal tlakovou sílu ve vetknutém nosníku vyztuženém lanem a zatíženém podle obr. 6.1. Pro kontrolu je uveden výsledek ($F \cotg \alpha$). Ten však platí pro vzpěru podle obr. 6.2. Příklad podle obr. 6.1 je staticky neurčitý, což si autoři učebnice neuvědomili. Kdyby student postupoval při zkoušce z pružnosti a pevnosti způsobem, který se naučil ze své středoškolské učebnice, dostal by nedostatečnou. Nejsou to však autoři učebnice a její recenzenti, kteří by si takové hodnocení zasloužili mnohem více?



Obr. 6.1



Obr. 6.2

Odpovím na provokativní otázku v nadpisu: podle mých zkušeností ne všichni. Existují velké rozdíly mezi jednotlivými učiteli na středních školách, ale bohužel i na školách vysokých, kde učitelé splňují (přínejmenším formálně) kritéria nejvyšší odbornosti.

Svou kritiku nemyslím nikterak zle. Fyzikové si zvykli považovat klasickou mechaniku za uzavřený obor, jemuž není třeba věnovat velkou pozornost. Tento přezíravý postoj může bohužel natropit mnoho škod při výchově nových generací odborníků i v jiných než technických profesích.

Existuje např. příručka *Fyzika '96/'97*, určená lékařským fakultám, která obsahuje otázky pro testy z fyziky při přijímacím řízení. Autory ani vydavatele neuvádím, neboť je nechci znevýhodnit. Uvedená publikace není totiž jediná, která si kritiku zaslouhuje.

Předem podotýkám, že nejsem příznivcem zmechanizovaných zkušebních testů, v nichž se kladou otázky typu „Jaká jsou jména tří zmrzlých

mužů?“ a nabízejí se odpovědi např. a) Pankrác Servác Bonifác, b) Kašpar Melichar Baltazar, c) Erich Maria Remarque, a to ani tehdy, je-li k nim vydána sbírka otázek s klíčem správných odpovědí. Vedou totiž studenty spíše k memorování hesel než k promyšlení látky a netestují skutečné znalosti, tím méně talent. Uvedeme příklady nevhodných otázek, volně citovaných z uvedené příručky.

Na otázku „Jak můžeme vyjádřit hybnost?“ se nabízejí odpovědi: a) jako součin skaláru a vektoru, b) jako podíl vektoru a skaláru atp. Za správnou se považuje pouze odpověď a). Zajisté, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, je-li \mathbf{p} hybnost, m hmotnost tělesa při jeho translačním pohybu a \mathbf{v} jeho okamžitá rychlost. Přemýšlivý student však může právem zatrnout jako správnou i odpověď b), neboť nic nám nebrání, abychom nenapsali rovněž platný vztah $\mathbf{p} = \mathbf{v}/m^{-1}$. Znalost této rovnice ještě neznamená, že student pojmu „hybnost“ rozumí. To by totiž vyžadovalo, aby vysvětlil, co tento pojem znamená, proč byl do mechaniky zaveden a kde a za jakých okolností platí zákon zachování hybnosti. Tyto znalosti, které jsou mnohem důležitější než sama definice pojmu, nemůže student v uvedeném testu vůbec uplatnit. Student, který mechaniku do hloubky ovládá, je tedy ve zřejmé nevýhodě.

Uvedu ještě jiný příklad podle téže příručky. K otázce „Jak lze vyjádřit zrychlení?“ se nabízejí odpovědi typu a) jako součin dvou vektorů, b) jako podíl vektoru a skaláru atd. Za správnou se podle klíče považuje pouze odpověď b). Ovšemže platí, že $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Správná je však i odpověď a). Pro Coriolisovo zrychlení totiž platí vzorec $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}$, kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti unášivého pohybu a \mathbf{v} vektor relativní rychlosti. Student, který zná kinematiku relativních pohybů a rozumí Coriolisovu zrychlení, bude za své vynikající znalosti v testu potrestán, jeho správná odpověď a) nebude uznána.

Poněkud jiného druhu je další příklad ze stejné sbírky. Autoři ukládají studentovi odpovědět na otázku, čím si vysvětlit pojem „odstředivé zrychlení“ při rovnoměrném kruhovém pohybu a za správnou považují odpověď, že k tomuto pojmu vede třetí Newtonův zákon. Od studentů se zřejmě očekává, že budou tento naprostý nesmysl papouškovat. Především je třeba

připomenout, že vektorový přírůstek $d\mathbf{v}$ za časový interval dt směřuje při rovnoměrném kruhovém pohybu vždy do středu kružnice a nikdy obráceně. Ostatně sama podstata vzorce pro velikost normálové složky zrychlení (při jakémkoli křivočarém pohybu bodu) $a_n = v^2 / r$ naznačuje, že nezáleží na smyslu rychlosti (v i $-v$ dají při stejném poloměru křivosti dráhy r stejnou složku a_n) a že při změně znaménka r se mění i znaménko a_n , tzn., že *normálové zrychlení bude vždy směřovat do středu křivosti dráhy*. Pojem „odstředivé zrychlení“ se bohužel vyskytuje snad ve všech českých učebnicích fyziky v souvislosti s vlivem rotace Země na velikost tíhového zrychlení. Neexistuje však žádný pohyb bodu po jakkoli zakřivené dráze, při němž by normálová složka zrychlení směřovala od středu křivosti.

Představme si pro jednoduchost, že těleso o hmotnosti m leží na povrchu Země na rovníku a je přitahováno do středu Země gravitační silou F . Část této síly o velikosti $\Delta F = m\omega^2 r$ uděluje tělesu dostředivé zrychlení $\omega^2 r$, přičemž ω je úhlová rychlost zemské rotace a r je vzdálenost těžiště tělesa od středu Země. Jako tíhová síla proto zůstává jen rozdíl $F - \Delta F$. Tíhové zrychlení (tj. zrychlení volného pádu) se proto rovná podílu $(F - \Delta F)/m$. Je menší proti gravitačnímu zrychlení F/m o hodnotu $\Delta F/m = \omega^2 r$, ale to neznamená, že poslední uvedený výraz je zrychlení odstředivé. Naopak, je to dostředivé zrychlení kruhového pohybu vyvolaného zemskou rotací.

S třetím Newtonovým zákonem to nemá co dělat. Zákon o akci a reakci se týká sil, a nikoli zrychlení. Smyslem tohoto zákona je poukázat na to, že působení těles je vždy vzájemné. Působí-li jedno těleso na druhé nějakou silou, působí zároveň i druhé těleso na prvé. Zrychlení však na sebe vzájemně nepůsobí.

Jsou Newtonovy zákony základem mechaniky pevných těles?

Mechanika jako věda je stará jen asi 300 let. Přesto bývá mnohými fyziky považována za hotový, uzavřený obor, tedy za součást historie, kterou se sluší znát, ale k níž už nelze ničím novým přispět. Stačí však letmý pohled na mnohé učebnice, abychom poznali, že se součástí této historie staly i mnohé dodnes živé mýty. Ty, které se udržují při životě nejhrouževnatěji, souvisejí s oslnivým úspěchem, s jakým byly Newtonovy zákony aplikovány v mechanice nebeských těles. Je-li možné pomocí newtonské mechaniky hmotných bodů popisovat a předvídat pohyb oběžnic ve sluneční soustavě a jejich měsíců, proč by nebylo možné stejně úspěšně popisovat a předvídat i pohyb malých těles a jejich částic? Vždyť i kontinuum je jenom idealizovaným modelem soustavy mikročástic – molekul či atomů. Proč by tedy newtonská mechanika hmotných bodů nemohla posloužit i k popisu pohybu kontinua? Stačí přece modelovat například pevné pružné těleso jako množinu hmotných bodů spojených nehmotnými pružinami. Těchto bodů je n ; pro k -tý z nich platí pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon)

$$\frac{d}{dt}(m_k \dot{\mathbf{r}}_k) = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{ik} . \quad (7.1)$$

Podle třetího Newtonova zákona musí být $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, $\mathbf{F}_{kk} = 0$. Sečteme-li všechny rovnice, dostaneme větu o hybnosti platnou pro celé těleso ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (m_k \dot{\mathbf{r}}_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k . \quad (7.2)$$

Znásobíme-li rovnici (7.1) polohovým vektorem \mathbf{r}_k a pak rovněž takto vzniklé rovnice sečteme, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{jk} , \quad (7.3)$$

kde

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k \quad (7.4)$$

značí moment hybnosti a

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \quad (7.5)$$

výsledný moment vnějších sil. Jsou-li vnitřní reakce \mathbf{F}_{jk} centrálními silami, tj. působí-li na spojnicích hmotných bodů j, k (žádný jiný směr se nenabízí), pak vektorový součin v rovnici (7.3) je roven nule. Výsledek

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (7.6)$$

představuje větu o momentu hybnosti. Věty (7.2) a (7.6) lze tedy odvodit z Newtonova zákona (7.1). Platí pro soustavu hmotných bodů m_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Stačí nyní přejít na elementární částice $m_k \rightarrow dm = \rho dV$ a součty nahradit integrálem, abychom dostali věty platné pro pevné těleso jakožto kontinuum:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS, \quad (7.2a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS. \quad (7.6a)$$

Zde $\rho \mathbf{b}$ je objemová síla, ρ hustota a \mathbf{t} trakční vektor (vektor napětí).

Na tomto místě je třeba se pozastavit a připomenout, že odvození rovnic (7.2) až (7.6) z rovnice (7.1) je bezesporé pouze pro soustavu hmotných bodů, jichž je konečný počet. Avšak i tato tzv. mechanika hmotných bodů má nezdravý základ, který kritizoval již Georg Hamel (1877–1954). Mechaniku hmotných bodů nazval intelektuální nečistotou. Představa, že v nekonečně malém objemu je konečná hmotnost, a tedy nekonečně velká hustota, je fyzikálně nepřijatelná. Soustava hmotných bodů nemůže být matematickým modelem kontinua už proto, že nevede k stejnému počtu elastických konstant. Připomeňme historický spor o jejich počet mezi zastánci teorie S. D. Poissona (1781–1840) a A. L. Cauchyho (1789–1857). Poisson dokazoval, že elastické vlastnosti obecně anizotropního homogen-

ního materiálu lze popsat patnácti konstantami, kdežto Cauchy dospěl k správnému číslu jedenadvacet.

Přesvědčivou kritiku zde naznačených postupů podal C. Truesdell [TRUESDELL (1964)]. Upozornil, že už Leonard Euler (1707–1783) považoval věty o hybnosti a o momentu hybnosti za nezávislé s jedinou výjimkou, kdy jde o absolutně tuhé těleso (v takovém případě nemá smysl pojem elastických konstant vůbec zavádět). Podle Truesdella se Euler často pohyboval na hranici propasti, ale nikdy do ní nespádl. Euler správně rozpoznal, že rovnice (7.6) je odvozena z rovnice (7.2), ale o rovnicích (7.6a) a (7.2a) to neplatí; tyto rovnice jsou nezávislé.

Za výchozí princip považuje Truesdell bilanční rovnici

$$\frac{d}{dt} \int_B \Psi dm = \oint_S \mathbf{i}(\Psi) \cdot \mathbf{n} dS + \int_B s(\Psi) dm, \quad (7.7)$$

kde Ψ je obecně tenzor libovolného řádu vztažený na jednotku hmotnosti, B je těleso ohraničené plochou S , vektor \mathbf{i} značí tok veličiny Ψ přes hranici S a s její zdroj. Veličiny \mathbf{i} , s jsou nezávislé. Jsou-li všechna pole vstupující do rovnice (7.7) spojitá, je rovnice (7.7) ekvivalentní s tvrzením, že

$$\rho \dot{\Psi} = \operatorname{div} \mathbf{i} + \rho s. \quad (7.8)$$

Do této rovnice Truesdell dosazuje za Ψ postupně energii jako skalární veličinu, pak hybnost jako vektor a nakonec moment hybnosti ve formě antisymetrického tenzoru druhého řádu. Dostává tak tři vzájemně nezávislé věty o energii, o hybnosti a o momentu hybnosti. Ve zvláštním případě získává po různých úpravách pro klasickou teorii spojitých prostředí Kirchhoffovu-Neumannovu rovnici určující hustotu vnitřní energie $\rho \varepsilon$ (v kartézských souřadnicích)

$$\rho \dot{\varepsilon} = \sigma_{km} d_{km} - h_{k,k} + \rho q, \quad (7.9)$$

v níž d_{km} je symetrická část rychlostního gradientu, h_k tepelný tok a q tepelný zdroj, a dvě Cauchyho rovnice

$$\rho \ddot{x}_k = \sigma_{jk,j} + \rho b_k, \quad (7.10)$$

$$\sigma_{kj} - \sigma_{jk} = 0. \quad (7.11)$$

Poslední rovnice znamená, že tenzor napětí je symetrický – jeho anti-symetrická složka je v daném případě nulová. Obecně však nulová nemusí být (u cosseratovského kontinua), je však vždy větou o momentu hybnosti jednoznačně určena.

Naproti tomu István Szabó dokazuje v učebnici *Einführung in die Technische Mechanik* [český překlad SZABÓ (1967)], která vyšla v mnoha vydáních, že z věty o momentu hybnosti můžeme dokázat symetrii tenzoru napětí bezesporu jen ve staticce; v dynamice můžeme tuto symetrii pouze předpokládat. Přepíšeme-li totiž rovnici (7.6a) do složek, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \int_V e_{ijk} \rho x_j \dot{x}_k dV = \int_V e_{ijk} \rho x_j b_k dV + \int_S e_{ijk} x_j \sigma_{rk} n_r dS. \quad (7.6b)$$

Poslední člen v této rovnici upravíme pomocí Gaussovy věty. Po malé úpravě dostaneme tuto rovnici ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_V e_{ijk} \rho x_j \dot{x}_k dV = \int_V e_{ijk} x_j (\sigma_{rk,r} + \rho b_k) dV + \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV. \quad (7.6c)$$

Ve staticce vymizí levá strana rovnice (veličiny jsou nezávislé na čase) a v důsledku (7.10) vymizí i první člen na pravé straně. Musí být proto nulový i zbývající člen, a to pro libovolný objem. To znamená, že platí (7.11). V dynamice jsou však první členy na obou stranách rovnice (7.6c) nenulové, takže ani zbývající člen nemusí být nulový. Symetrii tenzoru napjatosti je proto třeba požadovat (je to tzv. *Boltzmannův axiom*). Szabó se přitom odvolává na Truesdellovu práci, kde se však takový požadavek neklade. Skutečně, zavedení Boltzmannova axiomu lze nahradit větou o hybnosti (7.2a), která vede při konstantní hustotě ρ k rovnici (7.10). Upravíme-li totiž rovnici (7.6c) za uvedeného předpokladu na tvar

$$\int_V e_{ijk} x_j (\rho \ddot{x}_k - \sigma_{rk,r} - \rho b_k) dV = \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV \quad (7.6d)$$

a dosadíme za oblou závorku z rovnice (7.10), dostaneme (7.11). To znamená, že u nepolárního kontinua je možné symetrii tenzoru napětí dokázat z vět o hybnosti a o momentu hybnosti ve staticce i v dynamice, aniž potřebujeme Boltzmannův axiom.

Je tento axiom skutečně zbytečný? Odpověď není jednoznačná. Ze tří rovnic (7.2a), (7.6a) a (7.11) jsou jen dvě nezávislé, třetí lze z nich odvodit. Považujeme-li jednu z rovnic (7.2a), (7.6a) za nezávislou a druhou za závislou, pak Boltzmannův axiom (11) skutečně potřebujeme. Považujeme-li však rovnice (7.2a), (7.6a) za nezávislé, pak z nich lze vztah (11) odvodit, a Boltzmannův axiom je zbytečný.

Smyslem tohoto příspěvku bylo ukázat, že kritickému zkoumání je třeba podrobit vždy znovu každou vědu, i tu zdánlivě uzavřenou, jakou je mechanika. Podle Karla Poppera (1902–1994) nemůže být žádná věda uzavřená, neboť jde o věčné hledání (*unended quest*).

Tajemství Bernoulliho rovnice

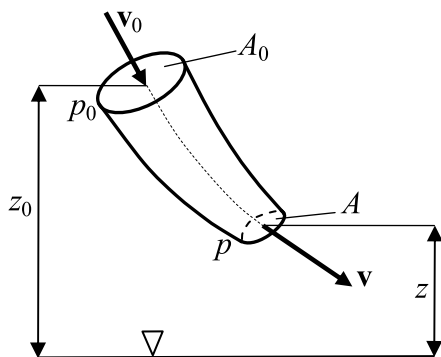
V originálním spise Daniela Bernoulliho, o němž píšeme níže, Bernoulliho rovnici nenajdeme. Vnucuje se otázka, co tam tedy najdeme, a proč rovnice

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konst.} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 \quad (8.1)$$

nese jeho jméno. Rovnice (8.1) se týká ideální nestlačitelné tekutiny (bez vnitřního tření). Jde o proudění v proudové trubici tak malého průřezu, že rychlost proudění v něm můžeme považovat za konstantní. Spíše bychom tedy mohli mluvit o proudovém vláknu. Součin plochy průřezu A a rychlosti proudu v je konstantní, tj. platí rovnice kontinuity

$$Av = \text{konst.} = A_0v_0. \quad (8.2)$$

Proudová trubice je znázorněna na obr. 8.1. Přitom p značí tlak, z výšku středu průřezu nad referenční vodorovnou rovinou, ρ hustotu a g gravitační zrychlení.



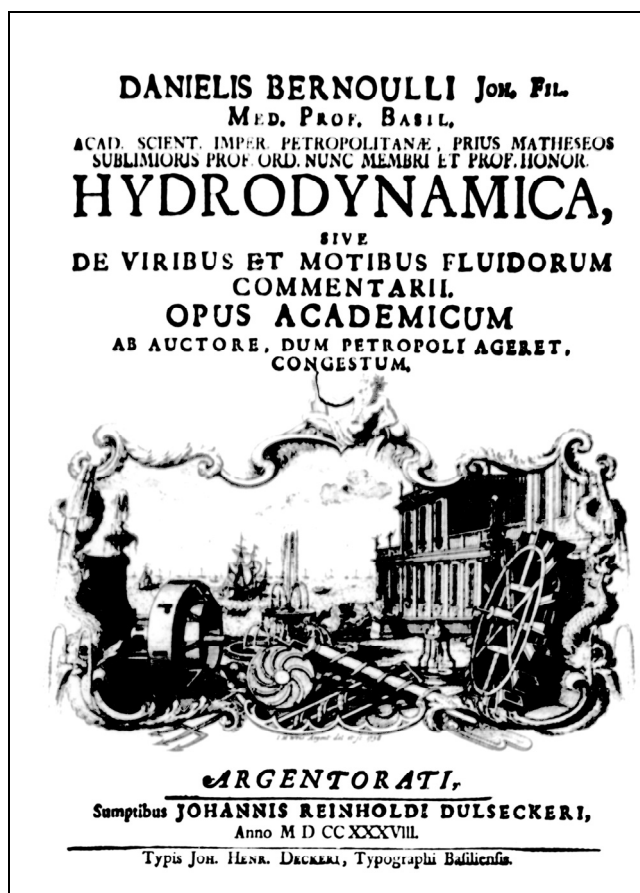
Obr. 8.1

Rovnice (8.1) a (8.2) jsou základem řešení mnoha důležitých úloh technické praxe, v nichž místo proudové trubice vystupuje potrubí (pokud lze předpokládat, že rychlost tekutiny v jeho průřezu je dostatečně přibližně konstantní).

Na Bernoulliho rovnici se vztahuje fundamentální Gerickeho věta, která prý má v dějinách matematiky obecnou platnost: *Věta, která nese něčí*

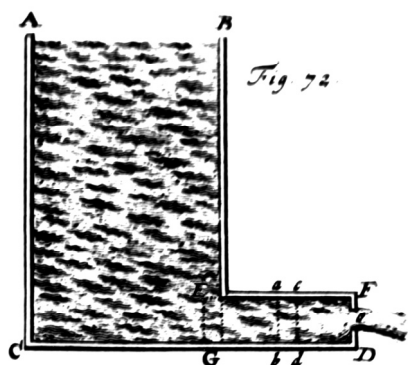
jméno, pochází od někoho jiného. [Viz GÖRTLER (1975).] Pokusíme se poodhalit její tajemství.

Rodina Bernoulliů pocházela z Antverp, byla velmi početná a slavná a do Basileje se uchýlila z náboženských důvodů. V mechanice se nejvíce proslavili bratři Jakub (1654–1705) a Jan (1667–1748), jakož i Janův syn Daniel (1700–1782). Posledně jmenovaný vydal v roce 1738 ve Štrasburku svou *Hydrodynamiku*, jejíž umělecky zdobený titulní list reprodukuje na obr. 8.2. V této knize tvrdí autor na str. 7, že jeho teorie je nová, neboť uvažuje zároveň tlak i pohyb. Na jiném místě najdeme větu: *Žádné těleso se nemůže samo povznést do větší výšky, než z které volně spadlo.* Původ této věty sahá až k Leibnizovi a Huygensovi a jejím obsahem, stejně jako obsahem rovnice (8.1), je zákon o zachování energie.



Obr. 8.2

K odvození rovnice (8.1) se vztahuje text uvedený až v předposlední (dvanácté) kapitole knihy (§ 5, str. 258). Tam je formulována tato úloha (text se vztahuje k obr. 8.3):



Obr. 8.3

Je dána nádoba s velmi velkým průřezem $ACGB$, kterou udržujeme plnou vody a která je navrtána a opatřena vodorovnou válcovou trubicou ED ; na vnějším konci trubky se nachází ústí o , z kterého voda konstantní rychlostí vytéká. Ptáme se, jak velký tlak působí na vnitřní straně trubky.

Řešení, které pak Bernoulli nabízí, je z našeho dnešního hlediska nepřesným slovním popisem fyzikální podstaty jevu, doprovázeným matematickými symboly, jejichž význam není nijak přesně vymezen. Je na čtenáři, aby si s nimi poradil. Abychom to čtenáři usnadnili, vložíme do překladu původního textu v závorkách vlastní vysvětlující poznámky. Bernoulli píše:

Nechť a značí výšku vodní hladiny AB nad ústím o ; výtoková rychlost vody v otvoru o je – vznikne-li ustálený stav – konstantní a rovna \sqrt{a} (odtud lze soudit, že $2g = 1$), neboť jsme předpokládali, že nádoba zůstává plná. Je-li poměr průřezu trubky k průřezu otvoru v ústí $n:1$, bude rychlost v trubce \sqrt{a}/n . Kdyby celá plocha FD uzávěry chyběla, byla by rychlost v trubce \sqrt{a} , tedy větší než \sqrt{a}/n ; voda v trubce se tedy snaží téci větší rychlostí, čemuž brání plocha uzávěry. Z toho vzniká přetlak, který se přenáší na vnitřní stěnu. Podle toho je tlak na vnitřní stěnu úměrný zrychlení, kterému by byla vystavena tekutina, kdyby překážka náhle zmizela a tekutina mohla volně proudit do atmosféry.

Všechno tedy probíhá tak, jako kdyby se trubka během proudění tekutiny k ústí o náhle v průřezu cd rozlomila a hledalo se zrychlení kapky (částice tekutiny) $abcd$. Z tohoto důvodu musíme vzít v úvahu nádobu $ABEcdC$ a odtud stanovit zrychlení, kterému budou podrobeny částice s počáteční rychlostí \sqrt{a}/n .

Nechť v značí proměnnou rychlost v trubce Ed , n průřez trubky (dříve to byl poměr dvou průřezů), její délka $Ec = c$, dx je délka ac . V tomto okamžiku vstupuje kapka do trubky u E , zatímco $abcd$ trubku opouští. Kapka u E , jejíž hmotnost je $n dx$ (předpokládá se tedy jednotková hustota), dosahuje rychlosti v , tedy živé síly $nv^2 dx$ (podle Leibnize je živá síla součinem hmotnosti a kvadrátu rychlosti), která vzniká zúplna; vskutku nemá kapka u E před vstupem do trubky žádnou rychlost, neboť obsah nádoby AE je nekonečně velký. K živé síle $nv^2 dx$ přijde ještě přírůstek, který voda dostane v prostoru Eb , když kapka ad vyteče. Tento přírůstek je zřejmě $2ncv dv$ (nc je hmotnost, $2v dv$ vznikne diferenciací v^2). To všechno se musí vztáhnout ke skutečnému sestupu kapky z výšky BE , tedy z výšky a . Takže platí:

$$nv^2 dv + 2ncv dv = n a dx .$$

Čili

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{a - v^2}{2c} . \quad (8.3)$$

Během celého pohybového děje je přírůstek rychlosti, který vzniká v časovém intervalu dx/v , úměrný tlaku. V našem případě je tedy tlak, který působí na kapku ad , úměrný velikosti $v dv/dx$, tedy též úměrný výrazu $(a - v^2)/(2c)$.

Všimněme si, že Bernoulli chápe působení tlaku vždy jen jako tlak mezi stěnou a tekutinou; pojem vnitřního tlaku v tekutině zavedl teprve Leonard Euler (1707–1783).

Jak odtud dospět k rovnici (8.1) a dát tedy obdivuhodným Bernoulliho úvahám moderní šat? Nejprve zavedeme konstantu úměrnosti λ a podle poslední citované věty položíme

$$p = \lambda \frac{a - v^2}{2c}.$$

Poté nahradíme výšku a výrazem $2g(z_0 - z)$ (neboť Bernoulli psal \sqrt{a} místo $\sqrt{2ga}$). Konečně poměr λ/c označíme jako ρ a dostaneme

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = z_0. \quad (8.4)$$

To je však zvláštní případ rovnice (8.1), v níž položíme $p_0 = 0$ (odečteme atmosférický tlak, takže p bude znamenat přetlak) a také $v_0 = 0$ (hladina v nádobě podle předpokladu neklesá).

V knize Danielova otce Jana Bernoulliho, nazvané *Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentalis pure mechanicis*, najdeme rovnici

$$p = \frac{\alpha^2 h^2 - \beta^2 \omega^2}{2\alpha^2 h} v^2 + h\omega v \frac{dv}{dx} \int \frac{ds^2}{y dt}, \quad (8.5)$$

kterou bychom mohli po obdobné rekonstrukci, jakou jsme ukázali u rovnice (8.3), převést na tvar

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{g} \int_{s_0}^s \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0. \quad (8.6)$$

Zde s je délka měřená po proudovém vlákně od průřezu A_0 k průřezu A (obr. 8.1). Je to Bernoulliho rovnice pro nestacionární proudění a pochází od Jana, tedy nikoli Daniela Bernoulliho. Ironií osudu je, že i tato rovnice bývá připisována Danielovi. Jako by to byla pomsta Prozřetelnosti za podvod, kterého se ze žárlivosti dopustil otec Jan, aby oslabil synovu slávu. Na rukopisu knihy Jana Bernoulliho, uloženém v bazilejské knihovně, najdeme totiž datum 1732, ačkoli rukopis byl prokazatelně dokončen až roku 1740.

Dnes se zdá nepochopitelné, jak „neohrabaně“ byla Bernoulliho rovnice v originálním spise odvozena. Tím, že autor zvolil např. $g = 0,5$ nebo $\rho = 1$, velice znesnadnil kontrolu rovnic podle fyzikálních rozměrů. Soustředil se na zkoumání fyzikálního jevu, zato byl nepozorný v označování veličin (srovnej dvojí význam symbolu n). Výsledkem jeho úvah nebyl vzo-

rec pro výpočet neznámého tlaku, ale pouze jakási slovně popsaná úměra s blíže neurčenou konstantou úměrnosti. A přece nelze jeho dílu upřít genialnost. Vždyť v jeho době nebyly ještě vytříbené pojmy a všeobecně uznávané definice a zákony. Z textu je zřejmé usilovné přemýšlení, které autora dovedlo k jeho výsledkům. Je to též proces poznávání, kterým musí i dnes projít – byť na jiné výchozí pozici – každý student oboru mechaniky, který své poslání bere poctivě a vážně. Krása jeho úvah spočívá v tom, že je lze nakonec matematicky popsat. To uměl ocenit už Leonardo da Vinci (1452–1519), který napsal: *Kdo nevěří ve vrcholnou jistotu matematiky, tápe v zmatku a nikdy neumlčí rozpory sofistických věd, které člověka učí věčnému křiku.*

Síly a energie v mechanice soustav

Pojmy *síla* a *energie* mají v živém jazyku mnoho významů. Ve vědeckých oborech se snažíme o jejich jednoznačnou definici, ale i tam existují rozdíly. Stačí porovnat takové obory jako například fyziku, lékařství nebo psychotroniku (pokud jsme ochotni považovat psychotroniku za vědu, což je přinejmenším sporné).

Česká věda se od dob obrození snažila vymezit proti vědě německé, přestože mnozí naši učenci byli odchovanci německých universit a čerpali z německých učebnic. Ještě po druhé světové válce se například pro *napětí* používal řecký symbol ν (odvozený od slova napětí), na rozdíl od německého σ (od slova *Spannung*). Když se pak roku 1951 objevil na trhu překlad Timošenkovy učebnice *Pružnost a pevnost I/II*, působil na naše vědce a techniky jako zjevení a písmeno σ bylo vzato na milost (tentokrát bylo odvozeno od anglického slova *stress*). Dnes se už všeobecně uznává, že žádná věda se nemůže úspěšně rozvíjet v izolaci od ostatního světa a že unifikace definic pojmů a jejich označování pomáhá každému k lepší orientaci.

Přesto se jednotné názvosloví rodí jen obtížně. Vzpomeňme například na stále používaná alternativní označení pro *posuv*. V soudobé české literatuře najdeme také *pošunutí*, *posunutí*, *přemístění*. Jiným příkladem je označení tlakových nádob. V jedné učebnici najdeme pojmy *tenkostěnná nádoba* a *silnostěnná nádoba*. Opakem síly je však slabost, ne tenkost. Měla by být proto používána označení *slabostěnná nádoba* – *silnostěnná nádoba* anebo *tenkostěnná nádoba* – *tlustostěnná nádoba*. Když na to autor těchto řádků upozornil autora zmíněné učebnice, dostalo se mu překvapivé odpovědi: *tlusté* je vepřové. Autor učebnice, vysokoškolský profesor, zřejmě považoval slova *tlustý*, *tučný* za synonyma.

Abychom se vyhnuli podobným nedorozuměním, shodneme se na tom, že pod pojmem *síla* budeme rozumět fyzikální veličinu, jejíž účinky jsou srovnatelné s účinky tíže, které každý ze zkušenosti zná. Statické účinky se projevují například tlakem na podložku nebo tahem za závěs a dynamické účinky změnou rychlosti. V dalším textu se zaměříme na zobecnění tohoto

pojmu v mechanice soustav a na důsledky tohoto zobecnění. Definice ostatních pojmů již nebudeme uvádět, zájemce je najde v terminologickém anglicko-českém slovníku publikovaném v *Bulletinu České společnosti pro mechaniku 1'98 a 2'99*.

Geometrická konfigurace mechanické soustavy o n stupních volnosti může být určena různými způsoby. Vždy je však k tomu zapotřebí n veličin, například vzdáleností a úhlů, které označíme q_1, q_2, \dots, q_n . Tyto veličiny nazveme *zobecněné souřadnice*. Mohou to být třeba kartézské souřadnice, ale také jakékoli jiné. Mohou mít různý fyzikální rozměr. Nemusí mít ani přímý geometrický význam, mohou to být například koeficienty Fourierovy řady apod. Sestavíme je do vektoru $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$. Síly (a silové dvojice) působící na tuto soustavu rozdělíme na *akční*, které při virtuálním pohybu konají práci, a *neakční (vazební)*, které tuto práci nekonají. Máme přitom na mysli nejen pohyb tuhých těles, ale také tělesa deformovatelná. Při deformaci tělesa se mění uspořádání hmotných částic (např. se mění vzdálenost atomů v krystalické mřížce), takže vnitřní síly konají práci, jsou to síly akční. Je-li těleso absolutně tuhé (což je ovšem pouhá abstrakce), vzdálenost těchto částic se nemění a vnitřní síly práci nekonají, jsou tedy neakční. Mezi tuhým a deformovatelným tělesem je proto kvalitativní rozdíl. Reakce mezi členy soustavy jsou neakční, ovšem s výjimkou třecích sil a momentů. U deformovatelných těles není počet stupňů volnosti omezen, my se však v této úvaze věnujeme pro jednoduchost soustavám s konečným počtem stupňů volnosti.

Zavedeme-li více zobecněných souřadnic než je počet stupňů volnosti, např. $N > n$, pak mezi nimi bude nutné splnit $m = N - n$ vazebních podmínek. Jsou-li tyto vazební podmínky implicitními funkcemi zobecněných souřadnic, jde o *holonomní podmínky*. Jsou-li dány jen neintegrovatelnou diferenciální formou (např. při valení kotouče na drsné ploše), jsou *neholonomní*. Abychom další výklad nekomplikovali, zůstaneme u případě, kdy $N = n$.

Nechť se nyní zobecněná souřadnice q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) změní o virtuální přírůstek δq_j a ostatní souřadnice se nezmění. Pak virtuální práce δA_j

všech akčních sil působících na danou soustavu se dá upravit do tvaru $\delta A_j = Q_j \delta q_j$. Veličina Q_j je *zobecněná síla*. Zobecněné síly sestavíme do vektoru $\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n]^T$ (ani ony nemusí mít jednotný fyzikální rozměr). Potom virtuální práce všech zobecněných sil je dána skalárním součinem (který už ovšem jednotný fyzikální rozměr má, a to joule)

$$\delta A = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}. \quad (9.1)$$

Tento výraz může, ale nemusí být integrovatelný. Podaří-li se integrovat, pak existuje taková *silová funkce* (též *potenciálová funkce*)

$$U = \int \mathbf{Q}^T d\mathbf{q} = U(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (9.2)$$

která generuje zobecněné síly podle vzorce

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (9.3)$$

Zpravidla se místo ní zavádí do výpočtů *potenciální energie* $V = -U$, takže

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (9.4)$$

Vykonají-li síly \mathbf{Q} práci $dU = \mathbf{Q}^T d\mathbf{q}$, klesne potenciální energie dV právě o tuto práci. Spotřebuje-li se tato práce jen na vzrůst kinetické energie T , bude $dV + dT = 0$, takže celková energie

$$E = V + T = \text{konst.} \quad (9.5)$$

Smysl zavedení pojmu potenciální energie je nyní zřejmý. Vztah (9.5) vyjadřuje *zákon zachování energie* v mechanické soustavě. Platí pro *konzervativní mechanické soustavy*. Síly působící v konzervativní soustavě označujeme rovněž jako konzervativní.

Později ukážeme, že rovnice (9.4) a (9.5) platí za předpokladu $V = -U$ jen tehdy, má-li výraz pro kinetickou energii kvadratickou formu

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (9.6)$$

a potenciální energie V je na zobecněných rychlostech \dot{q}_j nezávislá. Žádná z těchto funkcí nesmí záviset explicitně na čase, což znamená, že soustava

je *skleronomní*. Závislost na čase bychom dostali, kdyby některé parametry nebo vazební podmínky závisely na čase, např. by se některý závěs pohyboval předepsaným způsobem (jako příklad uvedeme pohyb kyvadla ve výtahu s nerovnoměrným pohybem). V takovém případě dostaneme ve výrazu pro kinetickou energii T nejen kvadratické členy zobecněných rychlostí, ale také lineární členy a dokonce členy, které na těchto rychlostech nezávisí. Vztah (9.3) sice v takovém případě platí, ale zákon (9.5) zachování celkové energie neplatí. Soustava energii buď hromadí, nebo rozptyluje. Říkáme, že soustava je *reonomní*. Síly v reonomní soustavě mohou mít sice silovou funkci, ale soustava přesto není konzervativní. Naopak síly udržující valení kotouče po drsné ploše silovou funkci nemají, ale jsou konzervativní (nedochází-li k prokluzu se třením, tak se energie nerozptyluje).

Poznamenejme, že koeficienty m_{ij} kvadratické formy (9.6) se mohou měnit v závislosti na zobecněných souřadnicích, mohou tedy záviset na konfiguraci soustavy (jako příklad stačí uvážit výraz pro kinetickou energii klikového mechanismu). Jsou to prvky symetrické matice hmotnosti \mathbf{M} , s kterou lze rovnici (9.6) napsat také v maticové formě

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \quad (9.7)$$

Projevují-li se v soustavě gyroskopické účinky, obsahuje vzorec pro kinetickou energii také lineární členy. Přitom může jít o skleronomní soustavu. I v relativistické mechanice je vzorec pro tuto energii složitější než (9.7).

Název *holonomní* resp. *neholonomní* soustava zavedl H. Hertz (1857–1894). Názvy *skleronomní* resp. *reonomní* pocházejí od L. Boltzmann (1844–1906).

Jak jsme se již zmínili, může potenciál U v některých případech záviset explicitně na čase, takže

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (9.8)$$

Síly odvozené z této funkce mají potenciál, ale nejsou konzervativní. Příkladem může být síla působící v cyklotronu na elektricky nabitou částici, jejíž kinetická energie se po každém oběhu zvětšuje. Síly proto nejsou kon-

zervativní, ačkoli mají potenciál (ten však závisí na čase). Naproti tomu síly udržující valení kotouče po podložce nemají potenciál, přestože zachovávají energii.

Může být proto užitečné označit společným názvem síly, které lze odvodit derivacemi skalární veličiny (bez ohledu na to, jsou-li konzervativní či ne). Nazvěme je proto *monogenní síly*. Síly, které nejsou monogenní, nazvěme *polygenní* (podle C. Lanczose). To jsou například síly tření.

V nejobecnějším případě může potenciál záviset nejen na zobecněných posuvech, ale také na zobecněných rychlostech, a ovšem explicitně také na čase:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (9.9)$$

Takový potenciál mají elektromagnetické Lorentzovy síly působící na nabitou částici v elektrickém a magnetickém poli. Pro ně však platí obecnější vztah [srovnej s rovnicí (9.19)]

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}. \quad (9.10)$$

Jestliže platí (9.6), a silová funkce (9.9) nezávisí explicitně na čase, avšak závisí na zobecněných rychlostech, je soustava skleronomní a zákon zachování celkové energie (9.5) platí, pokud potenciální energii definujeme vztahem

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - U. \quad (9.11)$$

Pro zjednodušení dalšího výkladu se nyní omezíme na soustavu hmotných částic („bodů“) m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), jejichž poloha je určena *polohovými vektory* (*radiusvektory*) \mathbf{r}_i . Podle d'Alembertova principu je virtuální práce δA vykonaná akčními a setrvačnými silami rovna nule:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{F}_i^T - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i^T) \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (9.12)$$

Položili jsme $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$. Jestliže mají akční síly potenciál, lze je odvodit ze silové funkce U podle vztahu $\mathbf{F}_i = \partial U / \partial \mathbf{r}_i$. Jsou to tedy monogenní síly.

V takovém případě můžeme za virtuální přírůstek $\delta \mathbf{r}_i$ zvolit skutečný přírůstek $d\mathbf{r}_i$ a první člen na pravé straně (9.12) integrovat. S druhým členem si takto neporadíme, setrvačné síly nejsou monogenní. Nelze je tedy odvodit z nějaké funkce platné pro soustavu jako celek, je nutné je formulovat pro každou částici zvlášť. Této nevýhody se lze zbavit obratem, který použili už Euler i Lagrange, ale teprve Hamilton (1805–1865) jej formuloval konzistentně. Rozpoznal, že časovou integrací lze setrvačné síly převést na monogenní formu. Do vztahu (9.12) zavedeme silovou funkci U , vynásobíme jej diferenciálem dt a integrujeme v mezích od $t = t_1$ do $t = t_2$. Dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{v}_i|^2 dt - \left[\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^T \cdot \delta \mathbf{r}_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (9.13)$$

Člen v hranaté závorce můžeme anulovat, zvolíme-li pevné integrační meze, takže bude $\delta \mathbf{r}_i(t = t_1) = \delta \mathbf{r}_i(t = t_2) = \mathbf{0}$. V předposledním členu poznáváme kinetickou energii T . Zavedeme proto *Lagrangeovu funkci*

$$L = T + U. \quad (9.14)$$

Výraz (13) musí být nulový, protože podle (9.12) platí, že $\delta A = 0$. Bu-
de tedy

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (9.15)$$

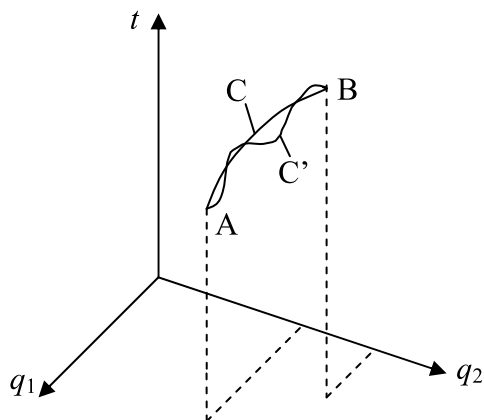
To je slavný *Hamiltonův princip*, podle něhož je časový integrál (akční integrál) Lagrangeovy funkce stacionární pro libovolnou variaci konfigurace mechanického systému, a to za předpokladu, že obě integrační meze jsou pevné. Rovnice (9.15) obsahuje veškerou informaci o pohybu mechanické soustavy jako celku.

Název *Hamiltonův princip* prosazoval Hamiltonův současník Jacobi (1804–1851), ale vědci v devatenáctém století jej nepřijali, ujal se teprve o sto let později.

Je-li soustava skleronomní a silová funkce nezávisí na zobecněných rychlostech, můžeme do rovnice (9.14) dosadit $U = -V$ a psát

$$L = T - V. \quad (9.16)$$

Pohyb soustavy je znám, známe-li v každém okamžiku zobecněné souřadnice popisující konfiguraci soustavy. Zvolíme-li zobecněné souřadnice q_1, \dots, q_n za bázi v n -rozměrném prostoru, bude tato konfigurace znázorněna jediným bodem C . Pohyb tohoto bodu bude znázorňovat pohyb soustavy. V geometrické interpretaci pohybu soustavy můžeme jít ještě o krok dále a zařadit čas t jako další souřadnici v $n + 1$ rozměrném prostoru. Pohyb soustavy je pak dán křivkou C , jak je znázorněno pro $n = 2$ na obr. 9.1. Je to jakási „světočára“ bodu C . Variovaná křivka, která odpovídá variaci pohybu, je označena C' . Obě křivky mají společný počáteční a koncový bod (A pro $t = t_1$ resp. B pro $t = t_2$). Čas je nyní jednou ze souřadnic, takže jej není třeba považovat za nezávislou proměnnou. Všechny souřadnice, q_i a t , by bylo možné vyjádřit pomocí téhož nezávislého parametru τ . Mají tedy rovnocenné postavení. Za nápad zahrnout čas mezi ostatní souřadnice vděčíme Lagrangeovi a jeho *Mécanique analytique* (1788).



Obr. 9.1

Podmínka (9.15) je podmínkou stacionarity akčního integrálu $\int_{t_1}^{t_2} L dt$.

Jak je známo z učebnic variačního počtu, nutnou a postačující podmínkou k tomu je splnění diferenciálních Eulerových-Lagrangeových rovnic (dále jen *Lagrangeovy rovnice*)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9.17)$$

Hodnotu skalární Lagrangeovy funkce L známe pro každý bod křivky C na obr. 9.1. Tím je akční integrál určen. Tato hodnota se nezmění, přejdeme-li k jiným souřadnicím označeným pruhem podle vztahů

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ q_n &= f_n(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Jde o vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbf{q} \leftrightarrow \bar{\mathbf{q}}$ v prostoru R^n . Tvar funkce L se dosazením z rovnic (9.18) změní, ale její hodnota nikoli, takže se nezmění ani akční integrál. To znamená, že Lagrangeovy rovnice budou platit i v nové soustavě souřadnic. Pro jednotlivá i se sice budou od předchozích lišit, ale jejich *soustava jako celek* bude opět zaručovat splnění podmínky (9.15). Protože čas je nyní jen jednou ze souřadnic, znamená to, že Lagrangeovy rovnice jsou invariantní nejen k transformacím (9.18), ale platí ve stejném tvaru dokonce i v souřadnicové soustavě, která se vzhledem k původní soustavě libovolně pohybuje. Splňují tedy *princip invariance*, který fascinoval fyziky devatenáctého století a který má důležitou úlohu i v současnosti. Jinou výhodou těchto rovnic ve srovnání s d'Alembertovým principem je, že potřebujeme jedinou skalární funkci L , která určuje dynamiku celé soustavy. Nepotřebujeme tedy určovat zrychlení jednotlivých členů a počítat virtuální práci všech setrvačných sil.

Dosadíme-li z rovnice (9.14) do (9.17), dostaneme po úpravě

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (9.19)$$

Levá strana této rovnice představuje i -tou složku zobecněné setrvačné síly (se záporným znaménkem), pravá i -tou složku zobecněné akční síly. Nezávisí-li silová funkce na zobecněných rychlostech, odpadne na pravé straně první člen a za U je možné dosadit potenciální energii ($-V$). Budeme však vycházet z obecnějšího tvaru (9.19). Tuto rovnici nyní vynásobíme

diferenciálem $dq_i = \dot{q}_i dt$ a zintegrujeme. Na levé straně dostaneme (integrační konstantu připojíme nakonec)

$$\int \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i dt - \int \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \int \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \int \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i. \quad (9.20)$$

Nezávisí-li kinetická energie T explicitně na čase, je její totální diferenciál

$$dT = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dT}{d\dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \right). \quad (9.21)$$

Sečteme-li všechny rovnice (9.20) (pro $i = 1, 2, \dots, n$), dostaneme s použitím (9.21) pro součet levých stran rovnic (9.19) výraz

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + \text{konst.}$$

Obdobně můžeme postupovat i na pravé straně (9.19), takže nakonec dostaneme (po převedení všech členů kromě konstanty na levou stranu rovnice)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T+U) = \text{konst.} \quad (9.22)$$

Definujeme-li *zobecněnou hybnost* rovnicí

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (9.23)$$

dostaneme z rovnice (9.22) zákon zachování celkové energie soustavy ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = H = \text{konst.}, \quad (9.24)$$

který je obecnější než (9.5) a platí pro jakoukoli formu Lagrangeovy funkce. Jediným požadavkem je, aby tato funkce nezávisela explicitně na čase. To znamená, že platí pouze pro skleronomní soustavu. Funkce H je v literatuře označována jako *Hamiltonova (hamiltonská) funkce*.

Závisí-li na zobecněných rychlostech jenom kinetická energie, a nikoli silová funkce, a má-li navíc kinetická energie tvar (9.6), bude

$$p_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_j, \text{ takže}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T. \quad (9.25)$$

Rovnice (9.24) potom dá

$$2T - T - U = T - U = T + V = \text{konst.}, \quad (9.26)$$

což je však rovnice (9.5).

Lagrangeovy rovnice jsou skvělým nástrojem k řešení úloh z dynamiky soustav pro ty, kdo s nimi dovedou zacházet. A že to nebývá ani mezi specialisty pravidlem, o tom se pozorní čtenáři odborných periodik jistě již sami přesvědčili.

Princip superpozice v mechanice poddajných těles

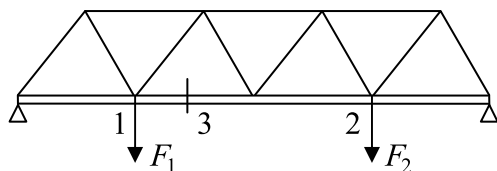
Vyhledáme-li v kterékoli učebnici pružnosti a pevnosti heslo „zákon Hookeův“, dovíme se zpravidla jen to, že jde o lineární závislost mezi tenzorem napětí a tenzorem přetvoření. S tím však Robert Hooke (1635–1703) neměl nic společného, a ani nemohl mít, vždyť podrobný rozbor a definici pojmu napjatosti v tělese uveřejnil až roku 1828 A. L. Cauchy (1789–1857) a modul pružnosti byl definován Thomasem Youngem (1773–1829) teprve roku 1807, tedy asi 130 let po zveřejnění Hookeova zákona (roku 1678).

Anglický fyzik a astronom Robert Hooke uplatnil roku 1675 v dodatku ke svému dílu *A description of helioscopes, and some other instruments* nárok na prvenství objevu pružiny nepokoje hodin, jež řídí jejich pohyb, veden snahou „čelit některým nepěkným jevům na kontinentě“. Tím zřejmě myslel spory o prvenství, které vedli někteří kontinentální evropští učenci a vynálezci nejen mezi sebou, ale i se svými anglickými kolegy. Aby pak „vyplnil prázdnotu dalších stránek“, oznámil, že uveřejní některé své objevy. Jako třetí z nich uvedl „pravou teorii pružnosti nebo pružné síly se zvláštním zřetelem k nejrůznějšímu použití, zejména pak početní metodu k určení rychlosti těles, která se pohybují účinkem pružné síly“. Svůj objev zašifroval do anagramu *ceiinossttuu*. Tím si pojistil prvenství, jehož by mohl pozbýt jen v případě, že by někdo dokázal, že týž zákon objevil dříve. Onu deklarovanou „pravou teorii pružnosti“ si přitom mohl nechat ještě libovolně dlouho jenom pro sebe.

O tři roky později, roku 1678, vyšlo jeho dílo *Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies*, v jehož úvodu Robert Hooke praví: *Teorie pružin, jakkoli se o ni mnozí dnešní matematikové pokoušeli, nebyla dosud nikým uveřejněna. Objevil jsem ji už před osmnácti lety, avšak rozhodl jsem se, že ji nebudu po částech uveřejňovat, poněvadž bylo mým úmyslem nejprve ji použít v některých zvláštních případech. Zároveň prozrazuje řešení svého anagramu: ut tensio sic vis, což znamená: „Čím větší protažení, tím větší síla“.* Nejde tedy o nic víc a o nic

méně než o přímou úměrnost mezi působící silou a vzniklou deformací. Poznamenejme, že v latině se tehdy obvykle nerozlišovaly znaky u , v . Řešení anagramu je složeno z písmen, obsažených v zadání.

Dnešní čtenář může být zklamán, že jde o tak triviální poznatek. Avšak ve své době to byl poznatek neobyčejně významný. Hooke poprvé jasně a vědecky přesně definoval pojem pružného tělesa. Jeho lineární zákon umožnil aplikaci principu superpozice a stal se základem řešení mnoha úloh z oboru statiky i dynamiky pružných těles. Konečně je třeba uvést, že Hooke pojednal jako první o harmonickém pohybu hmoty upevněné na pružině a rozpoznal izochronismus tohoto pohybu.



Obr. 10.1

Důsledky tohoto jednoduchého zákona objasníme na příkladu příhradové konstrukce znázorněné na obr. 10.1. Je zatížena dvěma silami F_1 , F_2 . Úlohou je vypočítat průhyb v místě 3. Nechme nejprve působit pouze sílu F_1 . Podle Hookeova zákona musí být průhyb y_3 úměrný působící síle, takže

$$y_3 = a_{31}^{(0)} F_1. \quad (10.1)$$

Horní index (0) znamená, že příčinkový činitel $a_{31}^{(0)}$ nezávisí na žádné síle. Kdyby však před přiložením síly F_1 působila již síla F_2 , mohl by tento činitel na uvedené síle záviset, aniž by se porušila uvedená přímá úměrnost. To vyjádříme připojením horního indexu (2), takže bude

$$\bar{y}_3 = a_{31}^{(2)} F_1 + a_{32}^{(0)} F_2. \quad (10.2)$$

U druhé síly je index (0), neboť začala působit jako první, nezávisle na síle F_1 . Nyní tuto sílu opět odejmeme, takže zůstane jen síla první. Příčinkový činitel a_{32} však může nyní záviset na první síle. Výsledný průhyb bude

$$\hat{y}_3 = a_{31}^{(2)} F_1 + a_{32}^{(0)} F_2 - a_{32}^{(1)} F_2. \quad (10.3)$$

Konečně odejmeme i zbývající první sílu, takže konstrukce nebude zatížena a průhyb bude nulový:

$$\tilde{y}_3 = 0 = a_{31}^{(2)}F_1 + a_{32}^{(0)}F_2 - a_{32}^{(1)}F_2 - a_{31}^{(0)}F_1. \quad (10.4)$$

Odtud vypočteme

$$a_{32}^{(1)} - a_{32}^{(0)} = \frac{F_1}{F_2}(a_{31}^{(2)} - a_{31}^{(0)}). \quad (10.5)$$

Levá strana nezávisí na síle F_2 . Proto musí být oblá závorka úměrná této síle, takže

$$a_{31}^{(2)} - a_{31}^{(0)} = kF_2. \quad (10.6)$$

Z této rovnice vypočteme $a_{31}^{(2)}$ a dosadíme do (10.2). Pro konstrukci zatíženou dvěma silami tak vyjde

$$\bar{y}_3 = a_{31}^{(0)}F_1 + a_{32}^{(0)}F_2 + kF_1F_2. \quad (10.7)$$

Poslední člen na pravé straně představuje vazbu mezi účinky obou sil a znemožňuje aplikaci principu superpozice. Zároveň porušuje Hookeův zákon, protože vzrostlo-li by zatížení (síla F_1 i síla F_2) dvakrát, vzrostl by tento člen čtyřikrát. Proto musí být $k = 0$. Pak ovšem podle (10.6) $a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(0)}$ a podle (10.5) také $a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)}$. Důsledkem Hookeova zákona je nezávislost příčinkových činitelů na zatížení a linearita rovnice popisující závislost deformace na působících silách. Účinky těchto sil je proto možno počítat nezávisle. *Princip superpozice je tedy důsledkem Hookeova zákona a průhyb je lineární funkcí působících sil.*

Platnost Hookeova zákona se omezuje na třídu lineárně pružných těles, jejichž namáhání se pohybuje v mezích úměrnosti. Tyto meze jsou dány konvencí. Přísně vzato, Hookeův zákon neplatí nikdy. Lze jej však aplikovat, jsou-li odchylky od něj zanedbatelné. Mohou mít dvě příčiny, jednak nemusí platit lineární závislost tenzoru napětí na tenzoru přetvoření (*materiálová příčina*), jednak mohou vlivem deformací (posuvů a otočení) vznikat podstatné změny vnitřních statických účinků (*geometrická příčina*). První příčina je snadno pochopitelná, zaměříme se proto na příčinu geometrickou.

Zdálo by se, že v teorii štíhlých prutů vyrobených z lineárně elastického materiálu stačí splnit dva požadavky, totiž aby posuvy a úhly otočení byly malé, a platnost Hookeova zákona je zaručena. Stačí však, abychom si vzpomněli na vzpěr. Přenáší-li prut velkou osovou silou, změní se ohybové momenty v něm i při malých průhybech nezanedbatelnou měrou. Je-li však vzpěrná síla konstantní, platí pro příčně působící síly zákon superpozice. Je to tím, že při konstantní vzpěrné síle je deformace popsána lineární diferenciální rovnicí. Zahrneme-li však vzpěrnou sílu do vnějších sil, které se mohou měnit, pak zákon superpozice neplatí.

Nemusí však platit ani tehdy, nepůsobí-li v prutu osová síla a průhyby a otočení jsou malé. Uvedeme příklad. Na tuhé vodorovné podložce leží polonekonečný štíhlý elastický prut o průřezu S , hustotě ρ a ohybové tuhosti EJ . Začneme jej zvedat svislou silou F působící na jeho konci (obr. 10.2). Protože rozdělení ohybových momentů v prutu je spojité, bude moment v místě odlehnutí prutu nulový (přímá část prutu se neohýbá). Délku odlehnuté části prutu označíme x . Pro tuto část musí tedy platit momentová podmínka

$$Fx - \frac{1}{2} \rho g S x^2 = 0. \quad (10.8)$$

Zde g značí tíhové zrychlení. Pro svislý posuv δ konce prutu, vyvolaný silou F a spojitém zatížením vlastní tíhou $\rho g S$ [$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$] dostaneme

$$\delta = \frac{Fx^3}{3EJ} - \frac{\rho g S x^4}{8EJ} = \frac{1}{24EJ} [8Fx^3 - 3\rho g S x^4]. \quad (10.9)$$

Když sem dosadíme za x z rovnice (10.8), vyjde nám po snadné úpravě

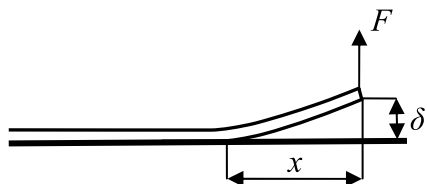
$$\delta = \frac{2}{3EJ} \frac{F^4}{\rho^3 g^3 S^3}. \quad (10.10)$$

Podobně vypočteme úhel otočení konce prutu (sklon) φ . Vyjde

$$\varphi = \frac{2}{3EJ} \frac{F^3}{\rho^2 g^2 S^2}. \quad (10.11)$$

Veličiny (10.10) a (10.11) můžeme učinit volbou F libovolně malými, a přesto nebudou tyto vztahy vyjadřovat lineární závislost deformace na působící síle. To znamená, že Hookeův zákon neplatí, a to přesto, že průhyby i úhly otočení jsou malé a přetvoření je přímo úměrné napětí. Tento

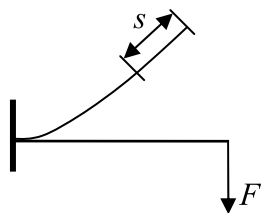
příklad by nám měl být poučením, že oprávněnost užití principu superpozice je vždy třeba bedlivě zkoumat.



Obr. 10.2

Nemožnost linearizovat vztahy (10.10) a (10.11) souvisí s tím, že se v dané úloze mění okrajové podmínky se zatížením (mění se délka odlehnuté části prutu). Ze stejných důvodů nelze linearizovat vztahy mezi přitlačnou silou a deformací v Hertzově teorii, která se týká dotyku mezi tělesy (dotyková ploška se mění se zatížením).

Uvedeme ještě jeden příklad. V pozůstalosti Jakuba Bernoulliho (1654–1705) byla uveřejněna úloha o elastickém prutu vetknutém do svislé stěny a zakřiveném tak, že se účinkem svislé síly určité velikosti napřímí (obr. 10.3). Řešení bylo uvedeno ve tvaru $a^2 = sr$, v němž s je délka oblouku střednice měřená od konce prutu a r poloměr křivosti prutu v místě určeném touto délkou, a je konstanta. Vydavatelem pozůstalosti byl Jakubův synovec Mikuláš (1687–1759), který přiznal, že není schopen správnost řešení dokázat. Důkaz podal o mnoho let později Leonard Euler (1707–1783). Rozpoznal, že řešením je klotoida.



Obr. 10.3

Dnes nahlédne správnost řešení každý alespoň trochu bystrý absolvent základního kurzu pružnosti a pevnosti. Ví, že změna křivosti prutu je úměr-

ná působícímu ohybovému momentu a konstantou úměrnosti je převrácená hodnota ohybové tuhosti EJ , takže

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} = \frac{Fs}{EJ}. \quad (10.12)$$

Ohybový moment M počítáme v napřímeném prutu v místě, které mělo v zakřiveném prutu křivost $1/r$. Srovnáním vyjde $a^2 = EJ/F$. Podle (10.12) je křivost nezátíženého prutu úměrná délce oblouku s a tuto vlastnost má právě klotoida. Konec prutu je pak středem klotoidy.

Nabízí se nyní tato úvaha: jestliže síla F přivede prut do přímého tvaru, pak síla $(-F)$ přivede přímý prut do tvaru klotoidy. Jinými slovy, rovnice klotoidy, kterou čtenář najde například ve známém *Přehledu užití matematiky K. Rektoryse a kol. (1. vyd. SNTL Praha 1963)*, je přesným řešením průhybu vetknutého pružného nosníku zatíženého na volném konci příčně působící silou. *Tato úvaha však neplatí, je příkladem nesprávné aplikace principu superpozice.*

V prvním případě působí totiž síla F koncem zatěžovacího procesu na konec napřímeného prutu. V druhém případě by síla $(-F)$ působila na zakřivený prut, tedy v jiném místě. Kdyby měla být klotoida vskutku řešením průhybu vetknutého nosníku zatíženého letmou silou, musil by být v této deformované poloze ohybový moment úměrný vzdálenosti s měřené po oblouku střednice, a toho nelze dosáhnout.

Odkaz hraběte Adhémara Jeana Clauda Barrého de Saint-Venanta dnešku

Ve dnech 18. až 22. srpna 1997 se ve Stockholmu ve Švédsku konala třetí Evropská konference o mechanice pevných těles (Euromech). Mimořádnou pozornost upoutal příspěvek Itala E. Benvenuta, cele věnovaný památce hraběte Adhémara Jeana Clauda Barrého de Saint-Venanta (1797–1886). Pokusíme se přiblížit obsah jeho sdělení našim čtenářům.

Význam tohoto učenice snad není třeba připomínat. Nejlépe ho charakterizují dvě věty z článku, který r. 1886 uveřejnil L. de Maricourt v časopisu *L'Univers*: *Pan de Saint-Venant dosáhl vrcholu vědy, za nímž je už jen sám Bůh, a přitom se jevil jako skromný, pokorný, horoucně věřící. Příklad takového člověka je výzvou sursum corda v naší rozkolísané době.* Laskavý čtenáři, posuď sám, zda poslední věta platí i pro naši dobu a zda odkaz tohoto velkého muže má dnešku co říci.

Saint-Venant byl ve své vlasti po dlouhé období opomíjen, ba přímo nenáviděn, a to až do chvíle, kdy byl ve svých 71 letech zvolen členem Akademie věd, v níž zaujal místo po zesnulém J. V. Ponceletovi. Dávno předtím však byl uznáván v Německu, v Anglii i v Itálii. Abbé Moigno píše v předmluvě ke knize *Lekce z analytické mechaniky* r. 1868, jak při psaní posledních dvou kapitol z teorie pružnosti hledal pomoc u svých německých a anglických kolegů. Ti mu odpověděli: *Blízko Vás žije autorita par excellence; pan de Saint-Venant. Porad'te se s ním, naslouchejte mu, následujte ho.* A jiný učenec dodal: *Vaše Akademie chybuje, velmi chybuje, když neotvívá dveře matematikovi, kterého nejpovolanejší odborníci považují za výsostného.*

K tomu je třeba poznamenat, že za člena Akademie byl Saint-Venant jako jeden ze šesti kandidátů navržen už r. 1843. Výběrová komise tehdy doporučila dva nejvhodnější kandidáty: Saint-Venanta a Morina. Zvolen však byl Morin a Saint-Venant se ocitl v pořadí až na čtvrtém místě. Sám Saint-Venant o toto členství usiloval, neboť by mu to bylo umožnilo věnovat se výhradně vědě a výzkumu. Dokladem této snahy je dopis, který na-

psal před osudnou volbou panu M. Ch. Dupinovi. V něm píše: *Řekli mi, že kdybyste v diskusích dnes večer vysvětlil, jak by bylo užitečné mít v řadách Akademie inženýra z oboru mostního a silničního stavitelství, že by to působilo velkým dojmem. Úřadující hlavní inženýr, který právě o mně podával zprávu, Vám dosvědčí, že můj úřad by mne nepovažoval za nehodného, kdybych jej reprezentoval.*

Příčinou nepřízně francouzské vědecké obce snad mohla být událost, o níž se r. 1902 ve své chvalořeči zmiňuje J. Bertrand. Saint-Venantovi, studentu École polytechnique,* bylo asi sedmnáct let, když byl Napoleon I. poražen u Lipska a nebyl schopen ubránit Francii před evropskými spojenými armádami. Zdálo se, že už i Paříž padne, a tak byli na barikády povoláni též studenti této školy. Avšak Saint-Venant odmítl nastoupit se slovy: *Mé svědomí mi nedovoluje bojovat za uchvatitele.* Byl prohlášen za zrádce a zbabělce a vyloučen ze studia. Pracoval pak po osm let jako praktikant v prachárně, do níž ho přivedl zájem o chemii a také přátelství s Gay-Lussacem. Teprve roku 1823 mohl znovu nastoupit do školy, tentokrát do Školy pro stavbu mostů a silnic (École des Ponts et Chaussées).

Z této doby pochází pozoruhodný zápis denního rozvrhu: **5:30** *Vstát, modlitba, meditace.* **6:30** *Učení z paměti.* **7:00** *Četba a výpisky historické nebo literární.* **8:00** *Práce matematické.* **9:00** *Práce pro Stavbu mostů a silnic.* **10:00** *Snídaně.* **10:30** *Procházka a denní záležitosti.* **11:00** *Práce pro Stavbu mostů a silnic.* **13 :00** *Hudba nebo lekce.* **14:00** *Práce pro Stavbu mostů a silnic.* **17:00** *Večeře.* **18:00** *Procházka.* **19:00** *Hudební hodinka.* **20:00** *Cvičení ve zbrani apod., nebo práce, redakce, nebo společnost, italská komedie nebo korespondence.* **22:30** *nebo 23:00* *Modlitba a uléhání ke spánku. – Žádné čtení v posteli, žádné dřímání ve dne, ani druhé zdřímnutí ráno v posteli.*

Jak nevzpomenout na slova Ludvíka Vaculíka, která adresoval koncem šedesátých let tehdejším samozvaným mocipánům: *Ať děláte, co děláte, panstvo z vás nikdy nebude.*

* Podle vzoru této školy bylo založeno ČVUT v Praze.

Saint-Venant byl křesťanem, ale nebyl bigotní. Jeho zbožnost byla – jako u všech velkých myslitelů – přesvědčivá. Jeho starší syn Raoul na něho prozradil, že kdyby byl otec poznal klášterní řády už dříve tak, jak je poznal později, byl by se stal benediktýnem. Zároveň však prý s úsměvem dodával: „Ovšem nejsem si jist, zda bych u nich vydržel, protože ti dokážou pracovat v zimě v nevytopených místnostech, a to bych asi nesnesl.“ Saint-Venant si poznamenal do svého zápisníku: *Chci, ó Pane, protože jsi mne povolal do stavu inženýrského, myslet jen na obyvatele tohoto kraje, který obývám, postarat se o to, aby uctívali a milovali krále, a to tím, že budu vykonávat skutky společensky prospěšné.* Na jiném místě píše: *Musím si přát jen obecné ctnosti, dobrotu, něhu, pokoru a prostou mysl.*

Byl zprostředkovatelem mezi těmi, kdo chtěli přírodu podřídit vědeckým teoriím (jako byla teorie Poissonova a Cauchyho), a těmi, kdo vycházeli z pouhé empirie (L. Vicat). Věděl, že pokrok je možný jen konfrontací teorie a praxe. Jeho inženýrská praxe se převážně týkala „zemědělské hydrauliky“, jak obor sám nazval, a nikoli mechaniky poddajných těles, v níž se jako vědec nejvíce proslavil. Navrhoval důmyslné zavlažovací systémy, regulaci toků, zabýval se využitím rybníků a vodních nádrží ke zlepšení krajiny i zemědělství. Měl hluboké sociální cítění, snažil se zlepšit úděl chudých venkovanů. Napsal: *Nic není méně křesťanského než opovržení, nic slepějšího než pohrdání bez schopnosti naslouchat.*

Ve svých 45 letech byl dán do zálohy se sníženým platem a o šest let později, po převratu r. 1848 vedeném synovcem Napoleona I., pozdějším císařem Napoleonem III., byl penzionován. Téhož roku napsal dopis panu de Falloux, v němž požaduje vpravdě křesťanské řešení sociálních nepokojů, bez represí a pendreků. Požaduje zadávání veřejných prací, chléb pro chudinu, odplácení zla dobrem, volá po velkorysosti. Navrhuje, aby vojáci část své několikaleté služby, např. tři až šest měsíců, věnovali pomoci zemědělcům. Svůj dopis končí slovy: *Promiňte, pane, že Vás unavuji svým dlouhým dopisem, který Vám možná nic neříká a který možná ani nemá obecný smysl. Adresuji jej však tam, kde – jak věřím – existuje inteligence.*

O rázovém namáhání těles

Způsobíme-li v nějakém prostředí *rozruch* ohraničený v prostoru i v čase na poměrně malou oblast, rozšíří se i do vzdálených míst a jeho šíření trvá po nějakou dobu i po skončení vnějšího působení. Vznikne *vlnový proces*. Tento jev zná každý z vlastní zkušenosti; např. šíření akustických vln ve vzduchu, vlnění na vodní hladině, otřesy půdy, šíření rozhlasových vln. Ačkoli tyto jevy mají mnoho společného, liší se navzájem natolik, že se v dalším textu soustředíme pouze na případ mechanického vlnění v tělesech vystavených rázům, tj. náhle přiloženým (náhle změněným) silám, popř. silám působícím jen po velmi krátkou dobu. Stručně se zmíníme i o rázech vzniklých dopadem kapaliny na pevné těleso.

Podstata šíření rozruchu spočívá ve vzájemném působení atomů. Můžeme si je představit jako hmotné částice spojené nehmotnými pružinami. Pro pochopení vlnového procesu je tato představa velmi užitečná, ačkoli je značně zjednodušená. Pohyb některé částice (atomu) se pružinami přenese do částic sousedních a pak do vzdálených, dokonce i značně vzdálených, přestože se částice pohnou jen nepatrně. Rychlost šíření rozruchu je větší, jsou-li pružiny tužší a hmotnost částic menší. Představíme-li si hmotu jako kontinuum, u něhož je hmotnost spojitou funkcí souřadnic, zastupují tuhost pružin elastické konstanty a hmotnost částic hustota. Část tělesa zasažená vlněním je od ostatní části, v níž jsou atomy dosud v klidu, oddělena vlnovým čelem.

Je-li těleso pevné a izotropní, mohou se v něm šířit dva druhy vln. V prvním případě se hmotné částice pohybují – podobně jako u akustických vln v tekutině – ve směru šíření vlny, takže v tělese vznikají v řezech kolmých ke směru šíření jen normálová napětí (tahová, popř. tlaková). V druhém případě provázeném vznikem tečných (smykových) napětí se částice pohybují kolmo ke směru šíření; to připomíná spíše elektromagnetické vlny. Jde o podélnou, resp. příčnou vlnu. Ať kterákoli z nich dopadne na volný povrch tělesa nebo na rozhraní s jiným tělesem, popř. s jiným prostředím, začnou se z místa dopadu v tělese obecně šířit obě vlny (podélná

i příčná). To je zásadní rozdíl proti vlně akustické nebo vlně elektromagnetické, které generují vždy jen vlnu téhož druhu. Připomeňme, že v ideálních tekutinách nemohou vzniknout smyková napětí, a tedy ani příčné vlny.

Odražené vlny se skládají s vlnami dopadajícími. Ustanou-li mezitím změny vnějšího zatížení tělesa a tvoří-li vnější síly rovnovážnou soustavu, obnoví se po mnoha průletech a odrazech vln rovnovážný stav, v němž vlnové procesy vlivem tlumení ustanou. Nejsou-li vnější síly v rovnováze, avšak jsou nadále neměnné, vytvoří se obdobně kinetostatický stav, v němž se rovněž napjatost ani poměrné deformace nemění. Mění-li se zatížení velmi zvolna, takže doba těchto změn je mnohem větší než doba průletu vlny tělesem, lze vlnové procesy v tělese zanedbat. U rázově namáhaných těles hrají naopak vlnové procesy dominantní roli. Zákony, kterými se vlnové procesy řídí, se značně zkomplikují, vzniknou-li kromě elastických také viskózní, popř. plastické deformace nebo lomy. Často nebývá splněn ani předpoklad malých deformací. Možnosti exaktního řešení vlnových procesů v prostorově ohraničených tělesech bývají omezené, dokonce i tehdy, uvažujeme-li jen elastické deformace. Inženýři si často pomáhají – zvláště u nosníků, desek a skořepin – různými deformačními hypotézami (předpokládají např. zachování rovinnosti průřezů, popř. zachování přímosti normál a jejich kolmosti k ohybové ploše). Ačkoli se tyto hypotézy osvědčily u statických úloh, nevedou u rázově namáhaných těles často k uspokojivým výsledkům, a řešení musí být korigována. Ani moderní rutinní metody, jako metoda konečných prvků, nejsou vždy bez problémů, neboť i ony představují hypotetické omezení deformační volnosti, a tím i zásah do vlnového procesu.

Rázy mezi tělesy bývají zpravidla nežádoucím jevem (např. v motorech, při zemětřesení apod.). Mohou však být také velmi užitečné (při záměrném štěpení materiálu, při tváření velkými rychlostmi, při průzkumu složení zemské kůry atd.).

V dalším textu se pokusíme na vybraných příkladech objasnit rozdíl mezi působností statického a rázového namáhání. Tomu druhému se ve školách věnuje jen malá pozornost.

Pružná tyč namáhaná rázem

Představme si svislou pružnou tyč (drát, lano) o délce l , která je nahoře nepohyblivě upevněna a dole zakončena narážkou (obr. 12.1). Na tyči je navléknuto absolutně tuhé závaží o hmotnosti m , které dopadne volným pádem z výšky h na narážku, a tím vyvolá v tyči sílu F . Těžiště závaží je koincidenční s osou tyče, takže působením síly F vznikne v průřezu tyče rovnoměrně rozdělené tahové napětí σ . Pokud zanedbáme hmotnost tyče, a tím i setrvačné síly v ní, je napětí ve všech průřezích tyče stejné, $\sigma = F/S$, kde S je plocha průřezu. Podle Hookeova zákona se tyč v takovém případě prodlouží o δ ; bude

$$\delta = \sigma l / E = Fl / ES. \quad (12.1)$$

Vztah (12.1) představuje přímou úměru mezi prodloužením δ a působícím napětím σ , resp. silou F . Za krátký čas dosáhnou tyto veličiny maximálních hodnot a pohyb se na kratičký okamžik zastaví (pak se obnoví v opačném smyslu). Tehdy se celá uvolněná potenciální energie závaží $mg(h + \delta)$ změnila na deformační energii $\int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV = \sigma^2 Sl / 2E$, kde E je

modul pružnosti. Ponecháme-li stranou případ, kdy závaží dopadá z velmi malé výšky, můžeme prodloužení δ proti výšce h zanedbat. Z rovnosti obou energií pak dostaneme, že maximální napětí v tyči bude

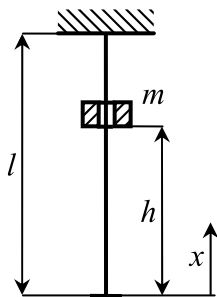
$$\sigma_{\max} = \sqrt{(2Emgh)/(Sl)} = v_0 \sqrt{(Em)/(Sl)}, \quad (12.2)$$

kde v_0 je dopadová rychlost závaží. Napětí je tedy nepřímou úměrnou mocninou z objemu tyče $V = Sl$. Připomeňme, že při statickém působení je napětí nepřímou úměrnou průřezu tyče. Zvolíme-li za materiál např. ocel o vysoké pevnosti, u níž vznikají před přetržením jen velmi malé plastické deformace, bude podle (12.2) dovolená výška pádu závaží menší než

$$h_{\max} = \sigma_{\text{pt}}^2 Sl / 2Emg. \quad (12.3)$$

Zde σ_{pt} je mez pevnosti v tahu. Kdybychom překročili výšku h_{\max} podle (12.3), drát by se s největší pravděpodobností přetrhl. Tato výška je nepřímou úměrná hmotnosti závaží m . Avšak N. Hopkinson (*Collected scientific*

papers, 1872) experimentálně zjistil, že výška h , při níž se drát trhá, na velikosti závaží téměř nezávisí. Vzorec (12.3) tedy neplatí. Navzdory tomu se s ním bohužel dodnes setkáváme v mnoha učebních textech.



Obr. 12.1

Vysvětlení tohoto rozporu přináší vlnová teorie, která respektuje hmotnost tyče o hustotě ρ . Pro šíření podélných vln v jednorozměrném kontinuu (v tenké elastické tyči) platí známá vlnová diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12.4)$$

kde $u(x, t)$ je posuv bodu v čase t , vzdáleného o x od spodního konce tyče (obr. 12.1). Čas budeme měřit od okamžiku, kdy závaží dopadne na zarážku. Tehdy bude $t = 0$. Snadno se můžeme přesvědčit, že vztah $u = f(x - ct)$, popisující šíření vlny ve směru osy x rychlostí $c = \sqrt{E/\rho}$, vyhovuje vlnové rovnici. Pro tuto vlnu totiž platí, že

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12.5)$$

Přitom E je modul pružnosti, $\partial u/\partial x$ je poměrné prodloužení a $\partial u/\partial t$ okamžitá rychlost částice o souřadnici x v čase t . Rychlost závaží označíme $v = v(t)$ (kladnou směrem dolů). Pokud se závaží dotýká narážky, je zřejmě

$$v(t) = -\frac{\partial u(0, t)}{\partial t}. \quad (12.6)$$

V čase $t = 0$ bude dopadová rychlost

$$v_0 = v(0, 0) = \sqrt{2gh}. \quad (12.7)$$

Napětí v tyči je podle Hookeova zákona dáno vztahem

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (12.8)$$

a vzhledem k (12.5) je také

$$\sigma(x, t) = -\frac{E}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (12.9)$$

Pro $x = 0$ dostaneme $\sigma(0, t) = Ev(t)/c$. V okamžiku dopadu závaží na narážku je $t = 0$ a napětí v přilehlém průřezu $x = 0$ vzroste podle (12.6), (12.7) a (12.9) náhle na hodnotu

$$\sigma_0 = Ev_0/c = \rho c v_0. \quad (12.10)$$

Toto napětí vskutku nezávisí na hmotnosti dopadajícího závaží; je přímo úměrné dopadové rychlosti v_0 . Není to však největší napětí v tyči, jak ještě ukážeme.

Reakce působící z narážky na závaží je $\sigma(0, t)S$. Rozdíl sil $\sigma(0, t)S - mg$ působí zpoždění $(-dv/dt)$ pohybu závaží, takže podle Newtonova pohybového zákona

$$-m(dv/dt) = \sigma(0, t)S - mg. \quad (12.11)$$

Dosadíme sem z rovnic (12.6) a (12.9) a upravíme. Dostaneme

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{ES}{m} \frac{v}{c} + g. \quad (12.12)$$

Rovnice (12.12) dává s počáteční podmínkou (12.7) řešení

$$v = \left(v_0 - \frac{g}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{g}{\lambda}, \quad (12.13)$$

kde $\lambda = ES/mc = (S/m)\sqrt{E\rho}$ má fyzikální rozměr s^{-1} .

Lze-li poměr g/λ zanedbat ve srovnání s dopadovou rychlostí v_0 , vyjde pro nepříliš malé $e^{-\lambda t}$ jednoduše*

$$v = v(t) = v_0 e^{-\lambda t} \quad (12.14)$$

a podle (12.6) a (12.9) také

* Tento předpoklad je totožný s tvrzením, že napětí mg/S vyvolané statickým působením tíhy závaží je mnohem menší než dynamické napětí σ_0 podle (12.10).

$$\sigma(0, t) = E \frac{v_0}{c} e^{-\lambda t} = \sigma_0 e^{-\lambda t}. \quad (12.15)$$

To znamená, že rychlost narážky, a také napětí v tyči v místě jejího upevnění, se s časem exponenciálně zmenšují. Mezitím se čelo napěťové vlny vzdálí rychlostí c až k vetknutému průřezu $x = l$, kam dorazí za čas $T = l/c$. Tahová vlna se odrazí opět jako tahová a obě vlny se sečtou, takže napětí na čele odražené vlny vzroste náhle na hodnotu $2\sigma_0$. Po čase $t = 2T$ se toto čelo vrátí k narážce, kde ovlivní další průběh pohybu závaží. Rovnice (12.14) a (12.15) tedy platí jen pro $0 < t < 2T$. Pro interval $2T < t < 4T$ je třeba vzít v úvahu, že zpoždující reakce působící na závaží se bude skládat jednak z reakce na dopadající odraženou vlnu $2\sigma_0 \exp[-\lambda(t - 2T)]$, jednak z reakce na novou vlnu $\bar{\sigma}(t)$, která vzniká v místě $x = 0$ spojitou změnou rychlosti narážky (závaží). Místo rovnice (12.11) bude tedy platit vztah

$$-m(dv/dt) = 2\sigma_0 S \exp[-\lambda(t - 2T)] + \bar{\sigma}(t)S. \quad (12.16)$$

Vlastní tíhu závaží zanedbáváme. Protože $dv = (c/E)d\bar{\sigma}$, bude po úpravě

$$d\bar{\sigma}/dt = -2\lambda\sigma_0 \exp[-\lambda(t - 2T)] - \lambda\bar{\sigma}. \quad (12.17)$$

Tato rovnice má řešení

$$\bar{\sigma}(t) = -2\lambda\sigma_0(t - 2T) \exp[-\lambda(t - 2T)] + \sigma_0 \exp(-\lambda t), \quad (12.18)$$

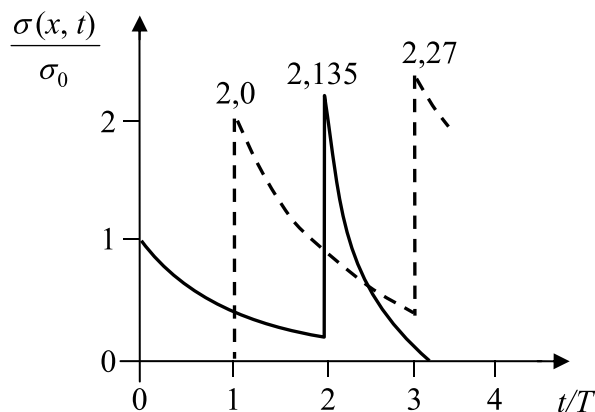
které vyhovuje počáteční podmínce $\bar{\sigma}(t = 2T) = \sigma_0 \exp(-\lambda 2T)$. Jde vlastně o podmínku spojitosti funkce $v(t)$. Celkové napětí v řezu $x = 0$ je

$$\sigma(0, t) = 2\sigma_0 \exp[-\lambda(t - 2T)] + \bar{\sigma}(t). \quad (12.19)$$

Řešení platí v intervalu $2T < t < 4T$, pokud se dotyk mezi závažím a narážkou nepřeruší. Připomeňme, že $\lambda T = \lambda l \sqrt{\rho/E} = \rho S l / m$ je poměr hmotnosti tyče k hmotnosti závaží. Rychlost úbytku napětí za čelem vlny je zřejmě větší, je-li poměr těchto hmotností větší. V čase $t = 4T$ dozná pohybová rovnice další obdobné změny, a tak by bylo možno pokračovat. Vždy, když je čas t lichým násobkem doby T průletu vlny tyčí, dojde k odrazu

čela vlny v místě vetknutí, a tím k náhlému vzrůstu napětí. Odražená vlna se vrátí po čase T vždy znovu k narážce a změní pohybový zákon pro další interval o délce $2T$. Zatímco napětí se mění nespojitě, rychlost závaží se mění spojitě. Charakteristický čas T průletu vlny tyčí je velmi krátký. Jde-li např. o ocel a o délku 1 m, je $T \doteq 0,2$ ms.

Průběh odvozených závislostí je zakreslen na obr. 12.2 pro případ, že $\rho Sl = m$, tj. $\lambda T = 1$. V tomto případě by sice bylo třeba vycházet spíše z rovnice (12.13) místo (12.14), ale protože jde pouze o ilustrativní příklad, zůstaneme u jednoduššího řešení (12.14), na něž navazují i rovnice (12.15) až (12.19). Plně je vyznačen průběh napětí v průřezu u narážky, čárkovaně ve vetknutém průřezu. V daném případě se dotyk mezi závažím a narážkou přerušší v čase $t \doteq 3,068T$ a maximální napětí $\sigma_{\max} \doteq 2,27\sigma_0$ vznikne v místě vetknutí ($x = l$) při druhém odrazu ($t = 3T$). Kdyby byl poměr $m / \rho Sl$ větší, vzniklo by maximální napětí rovněž větší, avšak až po více odrazech. Při dostatečně velkém tomto poměru by se velikost největšího napětí ustálila a závisela by už na něm jen velmi málo, jak to ukázaly Hopkinsonovy pokusy.



Obr. 12.2

Uvedené řešení sice vysvětlilo nesoulad mezi Hopkinsonovými pokusy a předpovědí podle rovnice (3), avšak ani ono nepopisuje skutečnost zcela věrohodně. Nezabývali jsme se rozbořem pohybu po přerušení styku mezi závažím a narážkou, ani průběhem dalšího rázu po opětovém dopadu závaží.

Zanedbali jsme koncentraci napětí v místě uchycení narážky a v místě vetknutí. Tyto koncentrace zasahují jen poměrně malý objem materiálu a neovlivní proto nijak podstatně dynamiku vlnového procesu. Pravděpodobně ji více ovlivní nedokonalá tuhost závaží, vetknutí i narážky. Část energie přestoupí i do jiných míst, než jsme předpokládali. Kromě toho se část energie rozptýlí tlumením. Dále jsme zanedbali příčnou kontrakci tyče, která nutně provází její prodlužování. Ta se může vzít v úvahu buď přibližnou opravou pohybové rovnice (12.4), nebo použitím obecných rovnic platných pro dynamiku třírozměrného kontinua. Důsledkem příčného pohybu hmotných částic tyče dochází k tomu, že postupná rychlost harmonické elastické vlny ve směru osy tyče už není konstantní, ale závisí na vlnové délce. Proto se v závislosti na čase mění fázové úhly ve fourierovském spektru postupující vlny, a tím i její tvar, vzniká disperze. V tomto případě, kdy nedbáme tlumení, je disperze určována geometrickým tvarem tělesa (tyče). Přesné řešení vlnového procesu je i u tělesa tak jednoduchého tvaru, jako je rotační válec, velmi složité.

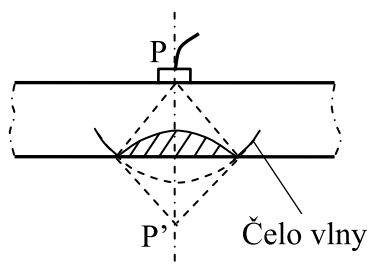
Obrátíme-li smysl zatěžování, vznikne v tyči po dopadu kladiva či bucharu tlakové napětí. Je-li tyč štíhlá, může po nárazu vybočit. Jde o případ dynamického vzpěru. Vniká-li přitom tyč do podkladu, do něhož je vetknuta, stává se i zdánlivě triviální úloha o zatloukání hřebíku teoreticky velmi komplikovanou.

Působí-li tlakové rázové napětí na širší podstavu tyče ve tvaru komolého kužele, vzrůstá jeho velikost při postupu napěťové vlny k vrcholu kužele. Po odrazu na volném konci změní napětí smysl z tlakového na tahové, které může způsobit odtržení hrotu kužele.

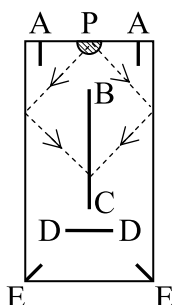
Pevnost explozivně namáhaných těles

Exploze nějaké nálože způsobí náhlé tlakové zatížení, které s časem méně náhle (přibližně exponenciálně) klesá. Z místa exploze se tělesem šíří tlaková napěťová vlna, která se po odrazu na volném povrchu mění v tahovou. Kromě ní vzniká obecně i smyková vlna. Odražená tahová vlna přichází do

míst, kde dopadající tlaková vlna již odeznívá, takže tahové napětí převládne a může způsobit vznik trhliny a dokonce i vytržení části materiálu. To je naznačeno pro případ „nekonečné stěny“ na obr. 12.3. Odštěpená část materiálu (je vyznačena šrafováním) se oddělí na opačné straně, než která byla zatížena. Exploze působila v bodě P, střed odražené vlny je v bodě P'.



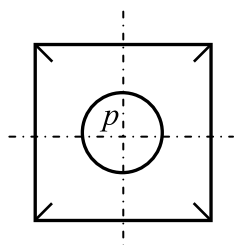
Obr. 12.3



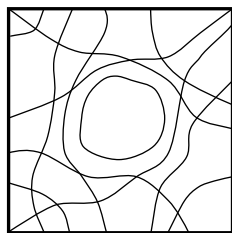
Obr. 12.4

KOLSKY (1963) popisuje poškození válce z perspeXu způsobené explozí v bodě P uprostřed horní základny (obr. 12.4). Pod místem exploze vzniká poškození působením velkého tlaku (šrafováno). Válcová trhlina A-A vznikla tahovou napět'ovou vlnou, která se šíří po odrazu tlakové vlny od válcového povrchu. Vlny odražené ve vzdálenějších místech tohoto povrchu se koncentrují v ose válce a způsobují čárovou trhlinu BC, jejíž délka závisí na velikosti nálože. Penízkovitá trhlina DD vzniká působením vlny odražené ode dna (obdobně jako na obr. 12.3). Kuželová trhlina E-E vzniká interferencí vln odražených na dolní části válcového povrchu a ode dna.

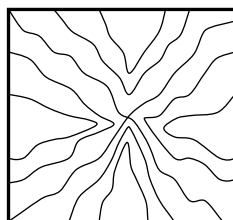
Kdyby vznikla exploze v betonovém potrubí s vnější čtvercovou hraničí průřezu podle obr. 12.5, vznikly by při překročení meze pevnosti trhliny nikoli v nejtenčí, ale právě naopak v nejtlustší části průřezu; vycházely by z rohů průřezu. Při statickém působení vnitřního přetlaku by porucha vycházela z vnitřního povrchu, a to v místech, kde má stěna nejmenší tloušťku. Vznik a šíření poruchy se tedy kvalitativně liší při statickém a při explozivním namáhání; to platí i pro potrubí kruhového průřezu a pro houževnatý materiál.



Obr. 12.5



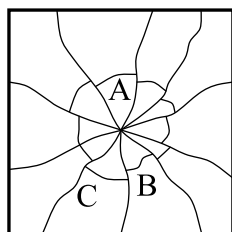
Obr. 12.6



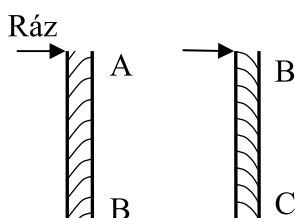
Obr. 12.7

Pamětníci válečných události si jistě vzpomenou, jak se účinkem exploze porušují okenní tabule. Je-li např. čtvercová tabule, na obvodě dobře upevněná, vystavena účinku silné tlakové vlny, poruší se tak, jak je schematicky naznačeno na obr. 12.6. Střední, zhruba kruhová část se rovnoměrně posune a zůstane téměř neporušena, oddělena od zbylé popraskané části obvodovou prasklinou. Je-li intenzita tlakové vlny malá, nebo působí-li tlak staticky, vznikají praskliny převážně ve směru od míst vetknutí směrem ke středu (obr. 12.7).

Soustředí-li se detonace uprostřed takové skleněné tabule, nebo narazí-li doprostřed nějaký předmět, tabule se prohne a počne praskat od obvodu ke středu, přičemž se trhliny počínají vytvářet na opačné, nezatížené straně. V dalším okamžiku se vytvoří obvodová trhlina naopak od zatíženého povrchu (obr. 12.8). Obě trhliny mají proto na hranách střeplů opačně orientovanou strukturu vlasových čar vzniklých etapovitým šířením trhlin (obr. 12.9). Podle nich lze bezpečně poznat, z které strany úder působil. Jiná situace vznikne, dopadne-li na skleněnou tabuli velmi rychlý projektil. Průhyb se nestačí vyvinout, takže projektil sklo prorazí, aniž je valně poruší; zanechá v něm otvor (průstřel) vroubený drobnými trhlínkami.



Obr. 12.8



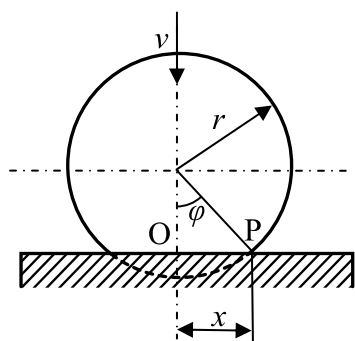
Obr. 12.9

Tzv. bezpečnostní sklo je při výrobě v proudě vzduchu rychle chlazeno tak, aby se vytvořila u obou povrchů vrstva s tlakovým vlastním předpětím. Tím se sice zvyšuje pevnost při ohybovém namáhání, avšak vznikne-li přece jen kdekoliv v takto předpjatém skle trhlinka, rozpadne se celý předmět naráz; energii potřebnou k vytváření nového povrchu dodá uvolněná deformační energie vlastního pnutí. Jinou ochranu před nebezpečným tříštěním okenního skla představují skla lepená z několika vrstev. U neprůstředných skel jsou vloženy vrstvy z umělé hmoty (polykarbonátu) schopné pohltit velké množství energie.

Trhliny se šíří vždy menší rychlostí, než je rychlost podélných vln; rychlost šíření trhlin je dokonce limitována rychlostí Rayleighových povrchových vln, která je o něco menší než rychlost příčných vln. U skla byla experimentálně zjištěna maximální rychlost šíření trhliny $2100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, což je asi 40 % rychlosti podélných vln v tenké tyči.

Erozivní účinek dopadajících kapek

Je známo, že prudkým vodním proudem lze rozrušovat horniny. Takové účinky nelze vysvětlit pouhou změnou hybnosti dopadajícího proudu jako celku, je třeba uvážit i působení vlnových procesů. Dokonce i při dopadu pouhé vodní kapky na pevné těleso vznikají mezi kapkou a tělesem nečekaně velké tlaky. Ačkoli trvají jen okamžik, mohou způsobit trvalé poškození materiálu tělesa, byť i jen v mikroskopickém měřítku. Pokusíme se objasnit vznik těchto extrémních tlaků.



Obr. 13.1

Na obr. 13.1 je znázorněna kapka ve tvaru koule o poloměru r , která dopadla na absolutně tuhý povrch. Dotyková plocha je v daném okamžiku kruh o poloměru $x = \overline{OP}$. Zřejmě

$$x = r \sin \varphi . \quad (13.1)$$

Na počátku bylo $x = 0$, koule se právě dotkla povrchu tělesa v bodě O . Odtud se počala šířit v kapalině tlaková vlna rychlostí zvuku c . Pokud je $c < dx/dt$, nemůže se změnit kulový tvar nezátíženého povrchu kapky, a tím ani tlak p v dotykové ploše. Velikost tohoto tlaku dostaneme z rovnice obdobné ke vztahu (12.10); vyjde

$$p = \rho c v . \quad (13.2)$$

Není-li pevné těleso absolutně tuhé, je tlak p o něco menší, než uvedeno; rozdíl však není podstatný. Protože

$$dx/dt = r(d\varphi/dt)\cos\varphi,$$

$$v = -d(r\cos\varphi)/dt = r(d\varphi/dt)\sin\varphi,$$

je též

$$dx/dt = v\cotg\varphi. \quad (13.3)$$

Má-li začít tlak v dotykové ploše klesat účinkem odražené odlehčující vlny, musí být $dx/dt < c$. Na počátku odlehčování bude $dx/dt = c$, takže $c = v\cotg\varphi \cong v/\sin\varphi = vr/x$. Odtud dostaneme poloměr $x = x_1$ na počátku odlehčování:

$$x_1 = rv/c. \quad (13.4)$$

Jakmile dosáhne poloměr dotykové plošky velikosti podle (13.4), začne tlak p klesat a kapalina se začne po povrchu roztékat.

Předpokládejme, že jde o vodní kapku např. o poloměru $r = 2\text{mm}$ a o dopadovou rychlost $v = 300\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1080 km/h). Protože $c = 1500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vyjde poloměr dotykové plošky, při němž začne počáteční hodnota tlaku po nárazu klesat, podle (13.4) $x_1 = 2 * 300/1500 = 0,4\text{ mm}$.

Této hodnotě odpovídá $\sin\varphi = 0,4/2 = 0,2$; $\cos\varphi \cong 0,98$. Střed kapky urazí dráhu $y = r(1 - \cos\varphi) = 0,04\text{ mm}$ za dobu $t = y/v \cong 0,13\text{ }\mu\text{s}$. Po této době začne tlak klesat. Jeho počáteční hodnota je podle (13.2) $p = 450\text{ MPa}$. To je hodnota srovnatelná s pevností konstrukční oceli.

Ačkoli se uvedený výpočet zakládá na zjednodušujících předpokladech, přece jen jasně ukazuje, jak vzniká erozivní účinek dopadajících vodních kapek. Kapky obsažené v mokré vodní páře erodují lopatky nízkotlakových stupňů parních turbín. Za průletu mlhou či dešťovými mraky se mohou poškodit okna letadel, což se stávalo zejména u starých letadel, která měla okna vyrobená z organického skla. U nich se za vzniku mikrotrhlinek zhoršuje průhlednost.

Theodore von Kármán a vlnění v elasticko-plastických tělesech

Asi před sto třiceti lety, přesně dne 11. 5. 1881, se narodil v Budapešti Theodore von Kármán, inženýr a vědec, který se nesmazatelně zapsal do historie aplikované mechaniky. Byl všestranně nadaný a měl zvláštní cit pro potřeby inženýrské praxe. Řešení problémů nebylo u něho nikdy samoúčelné. Byl světoobčanem a jeho život se dělí do pěti období podle místa, kde působil. Zmíníme se o jeho práci jen velmi stručně.

Göttingen (1906–1912). V tomto období se Kármán zabýval vzpěrem přímých prutů, u nichž namáhání překračuje mez úměrnosti, a také stabilitou tenkostěnných trub a ohybem Bourdonových trubic. Experimentoval s pevností těles vystavených izotropickému tlaku. Dokázal, že dostatečně homogenní tělesa snesou bez porušení i zatížení extrémně velkým izotropickým tlakem a že přitom ztrácejí svou případnou původní křehkost. Podal též kvantitativní analýzu vírové řady, která se vytváří za válce ponořeným do homogenního proudu tekutiny a způsobuje mimo jiné příčné rozkmitání stožárů a věží vystavených působení větru. O působení těchto vírů se můžeme přesvědčit jednoduchým pokusem, když do rybníku ponoříme dlouhý štíhlý prut a za vyčnívající konec jej ve svislé poloze vodorovně táhneme; při určité rychlosti se prut příčně rozkmitá. Ke kmitům tohoto druhu je nutno přihlížet u výškových staveb, např. ve věži ještědského vysílače musely být dodatečně kompenzovány velkým sférickým kyvadlem zavěšeným uvnitř, aby se předešlo únavovému porušení konstrukce. V projektu se totiž zprvu s těmito nebezpečnými Kármánovými víry nepočítalo.

Aachen (1912–1929). V tomto období se Kármán zabýval téměř výhradně prouděním, zejména obtékáním profilů, povrchovým třením mezi tekutinou a stěnou a teorií mezní vrstvy. Dal podnět ke vzniku statistické teorie turbulence a moderní aerodynamiky. Uplatnil přitom své zkušenosti s konstrukcí a zkoušením vrtulníků, které získal za první světové války. V teorii pružných tenkostěnných konstrukcí zavedl pojem spolunosné (efek-

tivní) šířky příruby. Zabýval se též válcováním a analogií mezi přetvářením plastických materiálů a granulovaných prostředí.

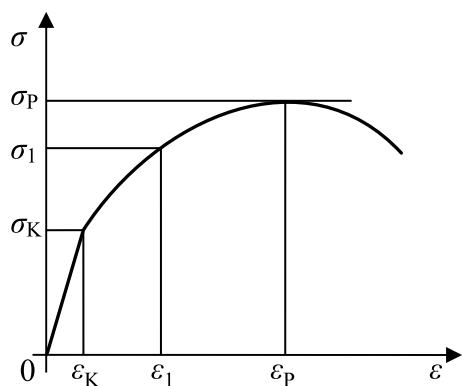
Pasadena (1929–1944). Do popředí Kármánova zájmu se dostává proudění nadzvukovými rychlostmi, problémy flutteru, účinek nárazového větru na konstrukci letadel, teorie podobnosti a znovu též turbulence. V souvislosti se stavbou letadel se Kármán znovu zabývá i problematikou tenkostěnných konstrukcí, např. nelineární teorií vzpěru (a elastické stability konstrukcí obecně), hledá vysvětlení rozporu mezi lineární teorií vzpěru skořepin a experimentálními výsledky z praxe a objasňuje vznik druhotných napětí v kroucených prutech s podélně proměnným kroučícím momentem. Na počátku druhé světové války řeší problém účinku explozí na stavby a konstrukce a podrobně rozebírá šíření vln v elasticko-plastických tělesech.

Washington (1944–1951). Kármán formuluje zákony podobnosti pro transsonické proudění, zabývá se rázovými vlnami a interferencí v proudících tekutinách.

Paříž (1951–1963). Kármán spojuje vysokorychlostní aerodynamiku s problematikou spalování a nový obor pojmenovává „aerothermochemie“. Vede skupinu poradců (Advisory Group) pro aeronautický výzkum a vývoj při NATO.

V tomto příspěvku uvedeme problém, který Kármán řešil počátkem čtyřicátých let. Půjde o tyč namáhanou rázem takové intenzity, že v ní vzniknou plastické deformace. Budeme předpokládat, že tyč je tenká a polonekonečná. Počátek souřadnic zvolíme na konci tyče, takže bude $0 \leq x < \infty$. V čase $t = 0$ se počne koncový průřez tyče náhle pohybovat konstantní rychlostí v_0 směrem proti kladnému smyslu souřadnice x . Souřadnice x se změní na $x + u$, kde $u = u(x, t)$ značí posuv (vyjde záporný, my však budeme, jak je zvykem, symbolem u označovat posuv ve směru kladné osy x). Bude tedy (pro $t > 0$)

$$v_0 = -\frac{\partial u(0, t)}{\partial t}. \quad (14.1)$$



Obr. 14.1

Během zatěžování se původní průřez tyče A_0 změní na A a v obecném průřezu tyče začne působit tahová síla $F = F(x, t)$. Hustotu označíme ρ (budeme předpokládat, že je konstantní). Hmotný element $\rho A_0 dx$ svou hmotnost za deformace nezmění a bude zrychlován silou $(\partial F/\partial x)dx$, takže

$$\rho A_0 dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} dx. \quad (14.2)$$

Člen na pravé straně (14.2) je úměrný přírůstku konvenčního napětí $\sigma = F/A_0$. Použitý materiál necht' je elasticko-plastický bez prodlevy na mezi kluzu. Příklad pracovního diagramu takového materiálu je na obr. 14.1. Budeme předpokládat, že závislost $\sigma(\varepsilon)$ nezávisí na čase ani na deformační rychlosti. Směrnice $d\sigma/d\varepsilon$ křivky, zvaná tečný modul, od meze kluzu (ε_K , σ_K) monotónně klesá. Protože během sledovaného děje nedojde k odlehčení, je napětí σ jednoznačnou funkcí poměrného prodloužení $\varepsilon = \partial u/\partial x$. Stejná analýza by proto platila i pro nelineárně elastický materiál. Přírůstek $d\sigma = (\partial F/\partial x)dx/A_0$ je v každém okamžiku úměrný přírůstku $d\varepsilon$, přičemž konstantou úměrnosti je tečný modul E_t . Je proto

$$\frac{1}{A_0} \frac{\partial F}{\partial x} dx = d\sigma = E_t d\varepsilon = E_t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (14.3)$$

Ze vztahů (14.3) a (14.2) pak dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E_t}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (14.4)$$

Tečný modul E_t je funkcí poměrného prodloužení $\varepsilon = \partial u / \partial x$, takže rovnice (14.4) je nelineární. Budeme-li však pozorovat pohyb infinitesimální vlny $d\varepsilon$ v předepjaté tyči s konstantním poměrným prodloužením ε , bude tečný modul E_t rovněž konstantní. Rovnici (14.4) pak bude možno považovat za lineární vlnovou rovnici, které vyhovuje d'Alembertovo řešení

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (14.5)$$

s rychlostí vlny c . Protože vlna postupuje v daném případě pouze ve směru kladné souřadnicové osy, je $g = 0$. Každá vlna $\varepsilon = \text{konst.}$ se tedy šíří „svou“ rychlostí $c = c(\varepsilon)$. Urazí-li vlna za čas t vzdálenost x , bude poměr x/t pro tuto vlnu konstantní. Dosazením (14.5) do (14.4) dostaneme, že

$$c = \sqrt{\frac{E_t}{\rho}}. \quad (14.6)$$

Tato úvaha nás přivádí k myšlence, že poměrné prodloužení ε bude na čase t a odlehlosti x záviset pouze prostřednictvím parametru $p = x/t$, takže

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon(p), \quad p = \frac{x}{t}. \quad (14.7)$$

Integrací pak dostaneme posuv:

$$u = \int_{-\infty}^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = t \int_{-\infty}^p \varepsilon(\bar{p}) d\bar{p}. \quad (14.8)$$

Protože integrace proběhla při $t = \text{konst.}$, je $dx = t dp$. Meze integrálu respektují okrajovou podmínku $u(x = \infty, t) = 0$. Označení proměnné v integrandu pruhem je nutné proto, že proměnná p se vyskytuje v horní mezi integrálu. Předejde se tak možným omylům při další manipulaci s tímto integrálem.

Řešení (14.8) nyní dosadíme do vlnové rovnice (14.4). Za tím účelem budeme tento výraz derivovat nejprve podle času:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^p \varepsilon(\bar{p}) d\bar{p} + t \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^p \varepsilon(\bar{p}) d\bar{p}. \quad (14.9)$$

Podle pravidla o derivování složených funkcí platí, že

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{x}{t^2},$$

takže

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\infty}^p \varepsilon(\bar{p}) d\bar{p} - pf'(p). \quad (14.10)$$

Opakováním derivace dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(-\frac{x}{t^2}\right)[\varepsilon(p) - \varepsilon(p) - p\varepsilon'(p)] = \frac{p^2}{t} \varepsilon'(p). \quad (14.11)$$

Derivaci podle p jsme označili čárkou. Podobně vyjde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon = \varepsilon(p), \quad (14.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{t} \varepsilon'(p). \quad (14.13)$$

Dosadíme-li (14.11) a (14.13) do vlnové rovnice (14.4) a zkrátíme výrazem $1/t$, získáme s přihlédnutím k (14.6) rovnici pro parametr p ve tvaru

$$(p^2 - c^2)\varepsilon'(p) = 0. \quad (14.14)$$

Tato rovnice má dvojí řešení. Buď je

$$\varepsilon'(p) = 0, \quad \varepsilon(p) = \varepsilon_1 = \text{konst.}, \quad (14.15)$$

nebo musí být

$$p = c. \quad (14.16)$$

Platí-li (14.15), dostaneme integraci vztahu (14.12)

$$u = \varepsilon_1 x + \varphi(t). \quad (14.17)$$

Integrační funkci $\varphi(t)$ dostaneme z okrajové podmínky (14.1). Vyjde

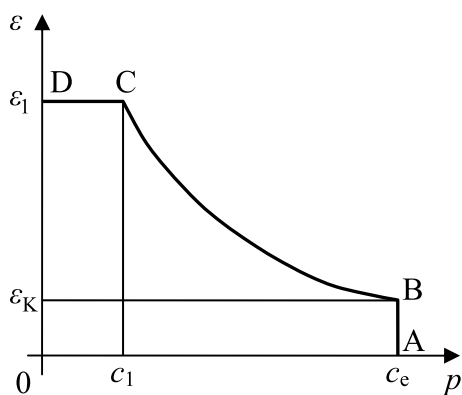
$$\varphi(t) = -v_0 t. \quad (14.18)$$

V každém případě musí podle (14.10) a (14.1) být

$$v_0 = -\int_{\infty}^0 \varepsilon(p) dp = \int_0^{\infty} \varepsilon(p) dp. \quad (14.19)$$

Pokusíme se nyní nalézt funkci $\varepsilon(p)$. Zvolíme rychlost v_0 takovou, aby v tyči vyvodila poměrné prodloužení ε_1 z intervalu $(\varepsilon_K, \varepsilon_P)$ (obr. 14.1). Začne-li se průřez tyče $x = 0$ pohybovat touto rychlostí, vzroste poměrné pro-

dloužení v jeho okolí z nuly až na hodnotu ε_1 . Poměrné prodloužení z intervalu $(0, \varepsilon_K)$ bude v pružné oblasti, takže vznikne elastická vlna a bude se šířit rychlostí $c_e = \sqrt{E/\rho}$, neboť tečný modul je v pružné oblasti totožný s Youngovým modulem pružnosti E . Za čas t dorazí tato vlna do vzdálenosti $x = c_e t$, takže $p = x/t = c_e$. Pro tuto hodnotu je $0 < \varepsilon < \varepsilon_K$ (úsečka AB, obr. 14.2). Je-li poměrné prodloužení ε z intervalu $(\varepsilon_K, \varepsilon_1)$, šíří se jeho vlna rychlostí $c = \sqrt{E_t/\rho}$. Tato rychlost závisí na poměrném prodloužení ε a je menší než rychlost elastické vlny. Vyčíslíme ji pomocí pracovního diagramu na obr. 14.1, z kterého odečteme pro dané ε tečný modul E_t . Pro vlnu platí vztah (14.16). Můžeme tedy zakreslit křivku BC na obr. 14.2. Bod C má souřadnice (c_1, ε_1) , přičemž rychlost c_1 je vypočtena pomocí tečného modulu v bodě pracovního diagramu $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ (obr. 14.1). Poslední větev CD hledané závislosti na obr. 14.2 tvoří rovnoběžka s osou úseček, pro kterou $\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{konst.}$, $0 < p < c_1$. Ta odpovídá řešení podle vztahu (14.15).



Obr. 14.2

Nyní se pokusme určit velikost potřebné rychlosti v_0 . Podle (14.19) jí odpovídá plocha pod čarou $\varepsilon(p)$ na obr. 14.2. Tuto plochu však můžeme vypočítat také tak, že ji rozdělíme na elementární obdélníčky rovnoběžné s osou úseček. Bude

$$v_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon dp = \int_0^{\varepsilon_1} p d\varepsilon. \quad (14.20)$$

S přihlédnutím k (14.16) a (14.6) odtud dostaneme

$$v_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{E_t}{\rho}} d\varepsilon. \quad (14.21)$$

Rychlost c vlny je podle (14.6) tím menší, čím menší je tečný modul, tj. čím větší je poměrné prodloužení ε_1 . Je-li $\varepsilon_1 = \varepsilon_p$, je $E_t = 0$, a tedy také $c = 0$. To znamená, že vlna s tímto poměrným prodloužením se vůbec nemůže šířit. Integrace nad tuto mez nemůže pokračovat, neboť tečný modul se stává záporným a rychlost šíření vlny je pak imaginární. Největší možná iniciační rychlost v_0 má tedy hodnotu

$$v_{\text{krit}} = \int_0^{\varepsilon_p} \sqrt{\frac{E_t}{\rho}} d\varepsilon. \quad (14.22)$$

Je to tzv. *Kármánova kritická rychlost*. Při ní je dosaženo meze pevnosti a tyč se přetrhne. Je-li tato analýza správná, pak jde nepochybně o veličinu s velkým významem pro dynamické tváření elasticko-plastických materiálů. Je to omezující faktor pro rychlost technologických procesů. Proto není divu, že se mnoho badatelů pokoušelo na počátku čtyřicátých let minulého století o experimentální verifikaci této teorie. Ukázalo se, že kritická rychlost vypočtená ze vztahu (14.22) souhlasí u některých materiálů uspokojivě s pokusy, ale v jiných případech nikoli. Příčinou rozdílu může být nesplnění některých předpokladů Kármánovy teorie. Proto se jiní autoři pokoušeli ověřit například platnost vzorce (14.21) tak, že pokusnou tyč nejprve přetvořili až do plastické oblasti s poměrným prodloužením ε_1 a pak nárazem vyvodili malé přídavné poměrné prodloužení $\Delta\varepsilon_1$. Takto vzbuzená vlna by se měla šířit rychlostí c_1 vypočtenou podle vzorce (14.6). K překvapení experimentátorů se však šířila rychlostí elastických vln c_e , tedy stejnou jako v nepředepjaté tyči. Tento paradox se dlouho nedařilo vysvětlit.

Záhadu vysvětlili teprve asi o dvacet let později BELL a STEIN (1962). Pečlivě připravenými experimenty se přesvědčili o tom, že při velmi pomalé řízené deformaci nevznikají plastické deformace plynule, ale s krátkými přetržkami, během nichž je odezva materiálu elastická. K obnově plastického stavu je třeba překonat určitou bariéru. Napětí přitom o něco

málo překročí předpokládanou mez plasticity a pak náhle poklesne zpět na tuto mez. Teprve pak se začnou plastické deformace rozvíjet. Při překračování této bariéry se materiál chová pružně, a to právě vyvolá elastickou vlnu, zvanou též „elastická návěšt“. Ta předbíhá vlnu plastickou. Jestliže se materiál přitíží o $\Delta\varepsilon_1$ ještě během zatěžování, tedy bez přerušení plastické deformace, tak se elastická návěšt neobjeví.

O suchém tření v mechanice soustav

Většině čtenářů se při přečtení titulku vybavil pravděpodobně *Coulombův zákon*, citovaný snad v každé učebnici fyziky. Podle již méně známého zákona H. Gerickeho pocházejí takto pojmenované zákony či matematické věty vždy od někoho jiného. V případě Coulombova zákona to vskutku platí. První úvahy o tření totiž najdeme již u Leonarda da Vinci (1452–1519). V jeho poznámkových sešitech jsou věty: *Tření vyžaduje dvojnásobného úsilí, jestliže zdvojnásobíme tíhu. (...) Tření působené touž tíhou bude klást na počátku pohybu též odpor, i když se dotyk bude dít v různé šířce a délce.*

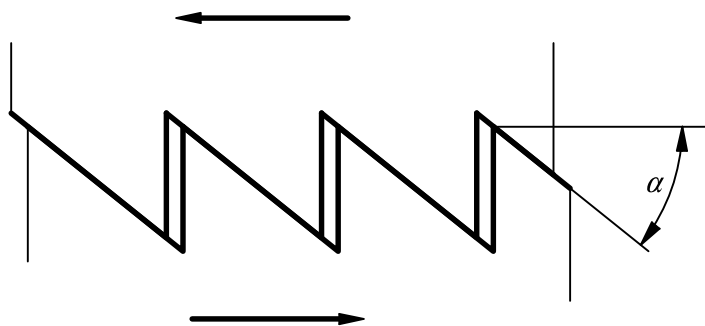
Roku 1699 předstoupil před Královskou akademii věd v Paříži fyzik Guillaume Amontons (1663–1705), pařížský rodák, který byl znám tím, že přišel s ideou „vzdušného telegrafu“. Byl by to přístroj umístěný na vyvýšeném místě, který by pohyby svých mechanických ramen přenášel zakódovanými signály poselství vzdálenému pozorovateli. Tentokrát však předložil jiný vynález, „moulin à feu“ (mlýn poháněný ohněm) a při diskusi přišla řeč i na tření. Amontons tvrdil, že síla tření je za pohybu úměrná přitlačné síle a že nezávisí na velikosti stykové plochy. Toto tvrzení vzbudilo u ctihodných akademiků úžas. To, že by třecí síla nezávisela na velikosti plochy, v níž se tělesa dotýkají, bylo neuvěřitelné.

Jiný francouzský fyzik, Charles Auguste de Coulomb (1736–1806), proslulý svým vynálezem torzních vah, roku 1781 potvrdil správnost Amontonsova tvrzení. Kromě toho důsledně rozlišil působení tření za klidu a za relativního pohybu. Zjistil, že tečná reakce těsně před začátkem pohybu o málo převyšuje velikost této reakce po uvedení těles do vzájemného pohybu. Proto začal uvažovat o možné molekulární adhezi mezi povrchy, avšak pak tuto myšlenku zavrhl, neboť ji nedovedl uvést do souladu s poznatkem, že síla tření nezávisí na velikosti stykové plochy. Předpokládal tedy, byť s jistými rozpaky a pochybnostmi, že tření způsobují interakce nerovností povrchu.

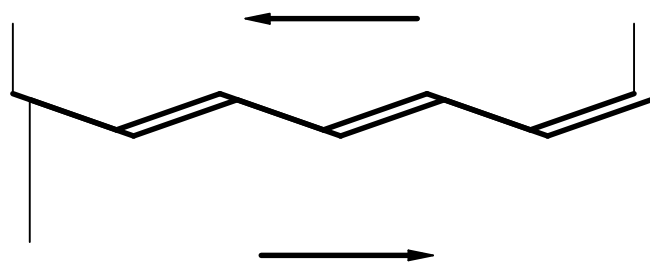
Tyto pochybnosti nedaly ani o půl století později spát francouzskému generálu a fyzikovi Arthuru Morinovi (1795–1880). Zprávu o svých četných pokusech předložil roku 1833 a potvrdil správnost Coulombových

poznatků. Podle něho je vlečné tření vsutku úměrné normálovému tlaku ve stykové ploše, avšak nezávisí na velikosti této plochy, a za mírných rychlostí ($0,5$ až $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) přibližně nezávisí ani na rychlosti.

Coulomb si tření nakonec vysvětloval jako vliv interakce nerovností povrchu, které si představoval v ideálním případě jako pilovité výčnělky (obr.15.1). Je-li přenášená normálová síla N a tečná reakce za pohybu $T = fN$, kde f je součinitel tření, pak při hladkých plochách vyjde $f = \text{tg } \alpha$. Tato Coulombova představa má jeden nedostatek: tření se projevuje i při pohybu opačným směrem, takže pilovité výběžky by měly mít tvar spíše podle obr. 15.2. Tu se však vnučuje otázka, proč se odpor proti pohybu (vzestup na pilovitých výběžcích) nestřídá s podporou pohybu (při sestupu)?



Obr. 15.1



Obr. 15.2

Podle současných poznatků je tření mezi pevnými tělesy jevem značně složitějším. Především styková plocha není skutečnou plochou dotyku; ta je mnohem menší a při stejné normálové síle téměř nezávislá na ploše zdánlivé. Tělesa se dotýkají pouze vrcholky hrbolků, a ty se elasticky, popř.

i plasticky deformují. Skutečná dotyková plocha se dá zjišťovat například proměřováním elektrického odporu. Tato metoda má však mnoho nedostatků. Především se ukázalo, že přechodový odpor není jednoduše nepřímo úměrný ploše skutečného kontaktu, jak by se mohlo předpokládat. Jde-li například o kruh o poloměru a , je přechodový odpor spíše nepřímo úměrný poloměru. Necht' je například pro plochu $A = \pi a^2$ přechodový odpor R . Pro čtyři plochy o polovičním poloměru je celková plocha stejná, tj. $A = 4\pi(a/2)^2 = \pi a^2$, avšak přechodový odpor je poloviční, $R/2$. Kromě toho je měření komplikováno rušivou přítomností oxidů. Ty tolik nevdají při měření tepelného odporu, ale měření je obtížné a zpravidla málo přesné. Také lze použít optické metody, využít jevu interference a vnitřního odrazu, avšak tyto metody se omezují jen na průhledná tělesa. A tak se nejlépe osvědčilo měření průchodu ultrazvuku.

V místech dotyku vznikají za pohybu vysoké a velmi koncentrované teploty. Mezi kovy dochází (i za studena) k mikrosvarům. Jejich ustřížením a následným drolením vzniká otěr. Vznikají-li oxidy, mají zpravidla větší objem než původní materiál, což může vést například u ocelových šroubů nebo čepů k jejich postupnému a úplnému zadření. V jiných případech se u kovů naopak adsorbovaným filmem z oxidů nebo z plynů tření zmenšuje. U mazaných povrchů mohou být obě stykové plochy odděleny nakonec jen tenkou molekulární vrstvou (tzv. polosuché tření, na rozdíl od případu neporušeného kapalinového filmu podle známé Reynoldsovy teorie z r. 1886).

Ještě složitější je tření mezi polymery a látkami podobnými pryži. Tam se molekulární vazby popisují pomocí termo-kinetických a molekulárně kinetických teorií.

Není proto divu, že se součinitel tření může i u týchž materiálů lišit, nejsou-li podmínky pokusu identické. A tak například pro suché tření za pohybu ocele po oceli najdeme v příručkách tyto hodnoty:

0,09 (při adhezi 0,15) – Szabó (1967)

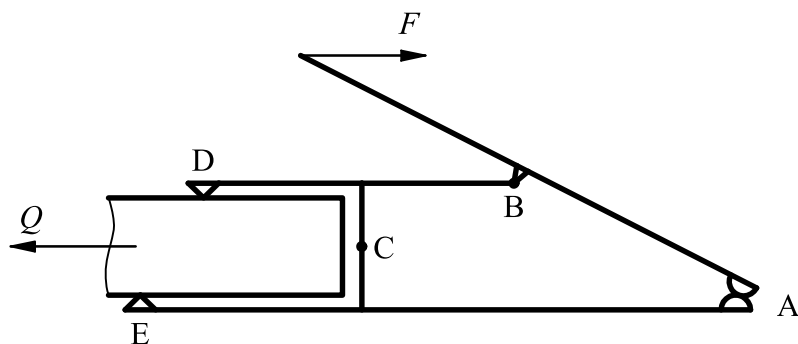
0,22 až 0,25 – Dobrovolný (1944)

0,15 – Černochoch (1977)

0,58 (při adhezi 0,8) – Bowden, Tabor (1954)

Poslední hodnota odpovídá dokonale hladkému, suchému a odmaštěnému povrchu.

Tvrdívá se, že výprava britského polárníka Roberta F. Scotta k jižnímu pólu (1911–1912) ztroskotala mimo jiné i proto, že konstruktéři jeho motorových saní neznali správnou hodnotu součinitele tření, který u ledu značně závisí na teplotě a s klesající teplotou vzrůstá. Například při pohybu ledu po ledu je součinitel tření $f = 0,02$ při teplotě $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$, avšak $0,08$ při $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$. Voskovaná lyže se na sněhu pohybuje za uvedené teploty se součinitelem tření $0,4$. Je to desetinásobek hodnoty pro pohyb na suchém sněhu při $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.



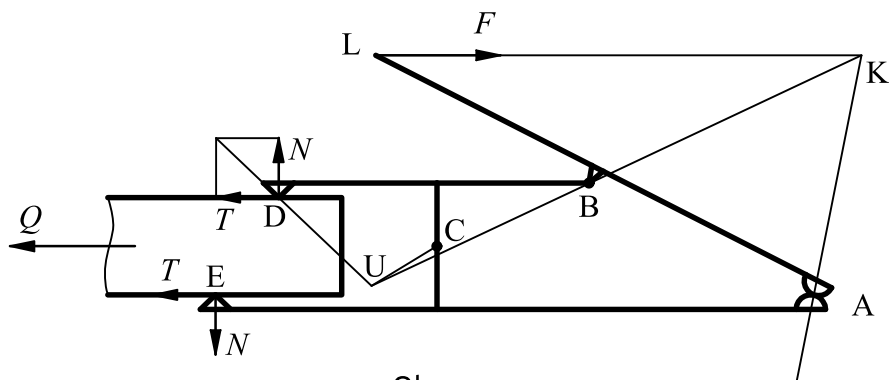
Obr. 15.3

U mnoha technických úloh vystačíme s Coulombovým zákonem v podobě nerovnosti $T \leq fN$, v níž znaménko rovnosti platí pouze za pohybu. V praxi se setkáváme s tím, že i takto jednoduchý vztah je špatně aplikován. Uvedeme příklad. Pro manipulaci s plechem byla navržena dvojitá ruční úchytka schematicky znázorněná na obr. 15.3. Slouží k vytahování plechu ze stohu. Plech je sevřen v bodech D, E a vytahován silou $F = Q$. Při dimenzování úchytka vycházeli konstruktéři z mezního případu, kdy dojde v bodech D, E k prokluzu a síla F bude mít proto maximální možnou velikost. Bude tedy (obr. 15.4)

$$T = \frac{1}{2}Q, \quad N = \frac{T}{f}. \quad (15.1)$$

Tyto síly tedy známe. Nyní určíme vektorovou přímku reakce R_B v bodě B (musí procházet průsečíkem vektorové přímky síly F s vektorovou

přímku reakce R_A v bodě A, tedy bodem K, obr. 15.4). Protože sílu F známe, můžeme zbývající síly R_A , R_B určit z podmínek rovnováhy tří sil působících na uvolněný horní díl ABL úchytky. Také na uvolněný díl BCD úchytky působí pouze tři síly. Protože tři síly v rovnováze musejí procházet jedním bodem, známe i vektorovou přímku reakce R_C (musí procházet společným průsečíkem U). Velikost této reakce určíme například z momentové podmínky rovnováhy členu BCD k bodu D.



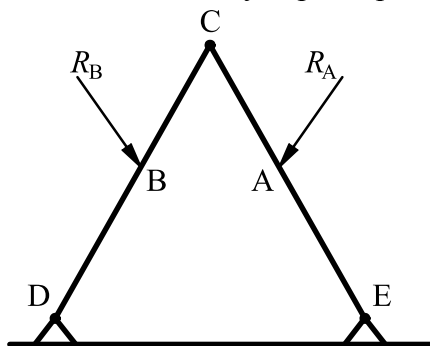
Obr. 15.4

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, co uniklo konstruktérům, že totiž takto určené reakce obecně nesplňují podmínku rovnováhy vnějších sil a reakcí (síly T , N , F tvoří nenulovou silovou dvojici), takže ani vnitřní reakce nejsou určeny správně. V čem je chyba?

Konstruktéři se dopustili chyby, když předpokládali prokluz v bodech D, E, aniž se přesvědčili, zda takový stav může nastat. Úlohu je třeba řešit nejprve za předpokladu, že prokluz nenastane, takže úchytka je na plechu v bodech D, E jakoby kloubově uložena. Pro známou sílu F získáme z podmínek rovnováhy členu ABL reakce R_A , R_B . Zbývající část konstrukce DCE tvoří tříkloubovou prutovou soustavu, zvanou někdy ne zcela vhodně „tříkloubový nosník“ (schéma ekvivalentní konstrukce je na obr. 15.5). Reakce v kloubech C, E, D se řeší buď početně metodou uvolňování členů, nebo graficky. Při grafickém řešení se nechá působit nejprve jen síla R_A , pak jen síla R_B , a obě řešení se superponují. Padnou-li obě reakce v bodech D, E dovnitř třecích kuželů, pak v obou těchto bodech bude $T < fN$ a žád-

ný prokluz nenastane, ani když síla F jakkoli vzroste (ovšem nedojde-li přitom k poruše). Anebo jedna či obě reakce padnou vně povrchu třecího kužele. Takové řešení nemůže platit, neboť je v rozporu s Coulombovým zákonem. Proto nastane v jednom či v obou místech prokluz. Úchytka se buď pootočí do jiné polohy, nebo plech ze sevření vyklouzne.

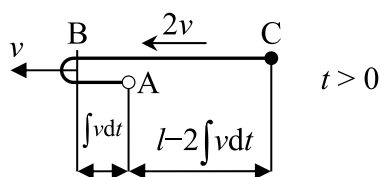
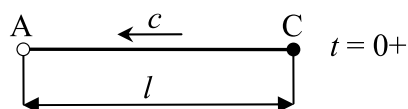
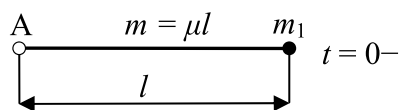
Na tomto příkladu je zajímavé i to, že konstruktéři úchytky tuto námitku k svému řešení nikdy nepochopili. A co vy, milí čtenáři?



Obr. 15.5

O práskání biče a chytání ryb na udici

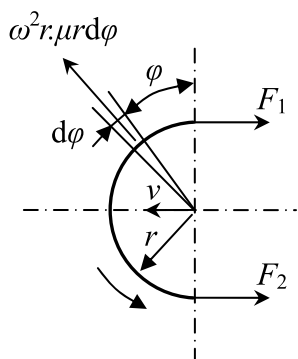
Rybáři milují ticho a klid, a tak je s podivem, jak může chytání ryb souviset s práskáním biče. Spojovat představu rybáře s představou kočího nebo pas-
tevce dobytka je věru nezvyklé. Souvislost tu však je a objasní ji mechanika.



Obr. 16.1

Zabývejme se nejprve pohybem biče. Předpokládejme, že se pohyb děje přímočaře. Konec bičiště, na který je uvázán řemínek, se pohybuje tam a zpět, až se ozve prásknutí. Vysvětlíme, čím je způsobeno. Nechť má řemínek na konci pohybu „tam“ rychlost $c/2$ a nechť se začátek A řemínku začne v okamžiku $t = 0$ pohybovat zpět rovněž rychlostí $c/2$. Předpokládejme, že tato rychlost bude po celý zbytek pohybu konstantní. S bodem A spojíme souřadnicový systém. Vzhledem k tomu, co bylo řečeno, je tento systém v čase $t > 0$ inerciální. Podle Galileova principu v něm budou mechanické děje probíhat stejně jako v systému spojeném se Zemí, ovšem jen pro $t > 0$. V okamžiku $t = 0$ nastává v pohybu biče ve zvolené souřadnicové soustavě diskontinuita. V limitě zleva, tj. v čase $t = (0^-)$, je rychlost řemínku biče vzhledem k bodu A nulová, v čase $t = 0$ vzroste skokem na

hodnotu c (obr. 16.1), neboť i rychlost bodu A se v okamžiku $t = 0$ vzhledem k Zemi obrátí. V čase $t > 0$ pokračuje řemínek v pohybu a vytváří poloviční smyčku. Část AB má rychlost nulovou, část BC se pohybuje rychlostí $2v(t)$. Konec smyčky, tj. ohyb B, se pohybuje rychlostí $v(t)$. Zřejmě $v(0) = c/2$. Poloměr r ohybu smyčky budeme považovat za velmi malý v porovnání s délkou řemínku l . Řemínek budeme považovat za dokonale ohebné vlákno s měrnou hmotností $\mu = m/l$ a s uzlem na konci o hmotnosti m_1 .*



Obr. 16.2

Zakřivenou část vlákna ve tvaru půlkružnice znázorňuje obr. 16.2. Její pohyb lze rozložit na rotaci úhlovou rychlostí $\omega = v(t)/r$ a translaci rychlostí $v(t)$. Protože moment setrvačnosti této části vlákna je úměrný r^3 , úhlové zrychlení máme $\dot{\omega} = \dot{v}/r$ a moment sil je $(F_1 - F_2)r$, musí být rozdíl sil $(F_1 - F_2)$ úměrný poloměru r a v limitě $r \rightarrow 0$ vymizí. Je proto $F_1 = F_2$. Setrvačné síly příslušné translačnímu pohybu jsou zanedbatelné, neboť hmotnost $\pi r \mu$ tohoto oblouku vlákna vymizí zároveň s poloměrem. Zbývají odstředivé setrvačné síly, pro které podle obr. 16.2 dostaneme

$$2F_1 = 2F_2 = \int_0^\pi \omega^2 r \cdot \sin \varphi \cdot \mu r d\varphi = 2\mu v^2. \quad (16.1)$$

* Poněkud jinak – avšak se stejným výsledkem – řešil tuto úlohu profesor západoberlínské university I. Szabó [viz SZABÓ (1967), příklad na str. 329].

Odtud

$$F_1 = F_2 = \mu v^2. \quad (16.2)$$

Protože zrychlení části AB vlákna je nulové, přeneseme se síla F_2 až do bodu A a zatíží konec bičičště. Síla F_1 způsobí zrychlení $2\dot{v}$ části BC, takže

$$F_1 = [\mu(l - \int v dt) + m_1](2\dot{v}) = [m + m_1 - \mu \int v dt](2\dot{v}). \quad (16.3)$$

Ze zákona zachování energie (za předpokladu $r \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{2}(m + m_1)c^2 = \frac{1}{2}(m + m_1 - \int v dt)(2v)^2 \quad (16.4)$$

vypočteme

$$v = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m + m_1}{m + m_1 - \mu \int v dt}}. \quad (16.5)$$

Platí, že $0 \leq \int v dt \leq l$, takže $\mu \int v dt$ vzrůstá z nuly až do hodnoty m .

Bude proto $v_{\min} = v(0) = c/2$ a dále

$$v_{\max} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m + m_1}{m_1}}. \quad (16.6)$$

Nebude-li na konci vlákna uzel o hmotnosti m_1 , poroste rychlost v bez omezení. Dosazením do rovnice (16.2) dostaneme i maximální sílu přenášenou na bičičště:

$$F_{2\max} = \frac{\mu c^2}{4} \frac{m + m_1}{m_1}. \quad (16.7)$$

Také zde platí, že pro $m_1 \rightarrow 0$ vyjde $F_2 \rightarrow \infty$.

Volný konec C řemínku se tedy urychluje během zpětného pohybu bodu A bez omezení (pokud $m_1 = 0$) a se čtvercem jeho rychlosti roste bez omezení i potřebná síla F_2 .

Z rovnic (16.2) a (16.3) dostaneme vyloučením síly F_1 integrodiferenciální rovnici pro rychlost $v(t)$ ve tvaru

$$m + m_1 - \mu \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{\mu}{2} \frac{v^2}{\dot{v}}. \quad (16.8)$$

Tato rovnice platí jen za předpokladu, že $m \neq 0$. Jinak by totiž bylo $v = c/2 = \text{konst.}$, $\dot{v} = 0$, $\mu = 0$. Pravá strana rovnice (16.8) by nebyla definována. Derivací podle času a úpravou vyjde

$$4 \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\ddot{v}}{\dot{v}}. \quad (16.9)$$

Integrací získáme vztah

$$\dot{v} = kv^4, \quad (16.10)$$

v němž k je integrační konstanta.

Vydeme-li z rovnice (16.5), dostaneme umocněním a úpravou

$$m + m_1 - \mu \int_0^t v(\tau) d\tau = (m + m_1) \frac{c^2}{4v^2}. \quad (16.11)$$

Po derivaci

$$-\mu v = -\frac{1}{2} c^2 (m + m_1) \frac{\dot{v}}{v^3}. \quad (16.12)$$

Ze srovnání (10) a (12) je zřejmé, že

$$k = \frac{2\mu}{c^2(m + m_1)}. \quad (16.13)$$

Separací proměnných a integrací (16.12) s počáteční podmínkou $v(0) = c/2$ vyjde průběh rychlosti $v(t)$:

$$v(t) = \frac{c}{2} \sqrt[3]{\frac{m + m_1}{m + m_1 - \frac{3}{4} \mu c t}}. \quad (16.14)$$

Tato rychlost se bude blížit hodnotě (16.6), když se t bude blížit kritickému času

$$t_{\text{krit}} = \frac{4}{3} \frac{l}{c} \left[\frac{m + m_1}{m_1} - \frac{m_1}{m} \sqrt{\frac{m + m_1}{m_1}} \right]. \quad (16.15)$$

Tedy se řemínek znovu narovná a za působení velké síly $F_{2\text{max}}$ zakmitá, což vnímáme jako prásknutí biče.

Konec C řemínku zatím urazil rostoucí rychlostí $2v(t)$ dráhu $2l$. Kontrolou správnosti odvozených vztahů je tedy splnění rovnice

$$l = \int_0^{t_{\text{krit}}} v(t) dt . \quad (16.16)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že výrazy (16.14) a (16.15) podmínku (16.16) skutečně splňují.

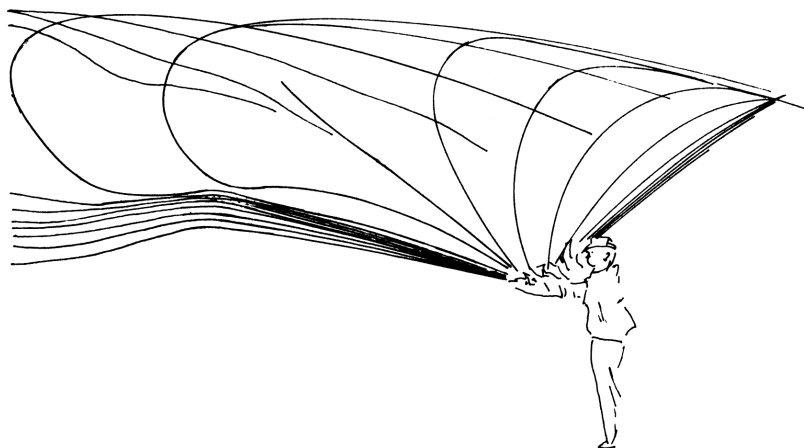
Není-li na konci řemínku uzel, je $m_1 = 0$ a rovnice (16.15) dá

$$t_{\text{krit1}} = \frac{4l}{3c} . \quad (16.17)$$

Je-li naopak tento uzel velký a těžký, vyjde limitním přechodem $m/m_1 \rightarrow 0$ z rovnice (16.15)

$$t_{\text{krit2}} = \frac{2l}{c} . \quad (16.18)$$

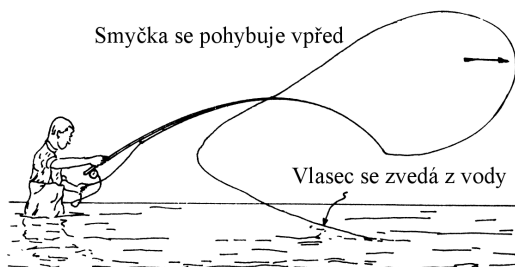
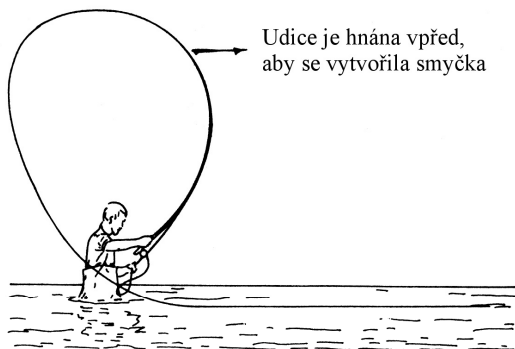
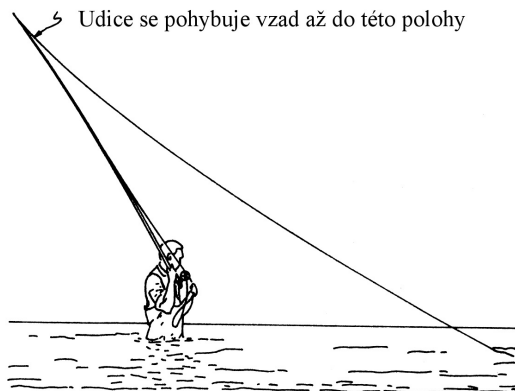
Je to doba, kterou potřebuje bod C k průletu vzdálenosti $2l$ konstantní rychlostí c . Platí, že $t_{\text{krit1}} = \frac{2}{3} t_{\text{krit2}}$. Ukázali jsme, že rozhodující úlohu mají setrvačné síly v ohybu řemínku biče, které zrychlují jeho konec náhle rostoucí silou, což způsobí jeho zakmitání spojené s akustickou emisí. Tu vnímáme jako prásknutí biče.



Obr. 16.3

Popsaného efektu využívá zcela obdobně i rybář, když vrhá do vody mušku či třpytku upevněnou na konci dlouhého vlasce. Nejprve rozkmitá udici, přičemž při pohybu směrem k hladině uvolňuje volnou rukou vlasce. Při zpět-

ném pohybu se délka vlasce nemění. Když je vlasec natolik dlouhý, že se muška téměř dotkne vodní hladiny, následuje zpětný pohyb a konečný vrh, po jehož zakončení se udice nevrací, ale v poloze téměř vodorovné zakmitá. Vlasec přitom vytvoří poloviční smyčku, jejíž oblouk urychluje svými setrvačnými silami pohyb konce vlasce s návnadou, analogicky tomu, jak ohyb B na obr. 16.1 urychloval pohyb části BC řemínku biče. Tak se stane, že muška dopadne do velké dálky rychlostí mnohdy větší, než byla rychlost konce udice.



Obr. 16.4

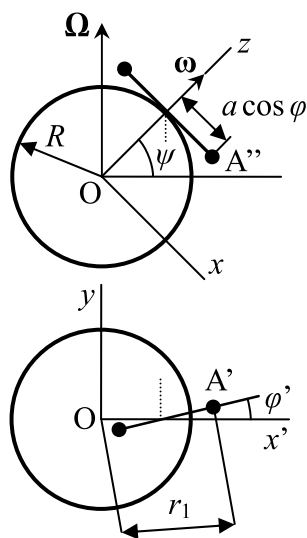
Kdybychom chtěli mušku vrhnout např. z výšky 1,5 m bez udice, pouze z ruky, do vzdálenosti 20 m, musili bychom mušku urychlit – se zřetelem k odporu vzduchu – až asi na 130 m/s, tj. 470 km/h. Když však použijeme udici s vlascem dlouhým 20 m, pak by stačila rychlost konce udice pouhých 6 m/s, aby muška dopadla do vzdálenosti 20 m rychlostí 30 m/s, ovšem nebýt odporu vzduchu. Ve skutečnosti působí odpor vzduchu nejen na mušku, ale i na vlasec, takže k stejně úspěšnému vrhu musí být rychlost konce udice dokonce o málo větší než 30 m/s. Pohyb mušky se přitom nejprve zpomaluje vlivem převažujícího odporu vzduchu a teprve potom zrychluje. Na obr. 16.3 je překreslen průběh závěrečného vrhu z fotografie pořízený při stroboskopickém osvětlení [WALKER (1985)].

Na obr. 16.4 je zakreslen jiný průběh vrhu mušky, při kterém se rovněž využívá smyčky vlasce k urychlení pohybu.

O jednom experimentu barona Eötvöse

Baron Roland Eötvös (maďarsky Loránd, Báró Eötvös) (1848–1919) byl synem známého literáta, demokrata, socialisty a liberála barona Józsefa Eötvöse, který koncem minulého století významně přispěl jako ministr školství k modernizaci maďarské společnosti. Sám se stal po otcově vzoru rovněž ministrem, avšak r. 1895 rezignoval, aby se mohl věnovat výuce fyziky na univerzitě v Budapešti.

Eötvös zavedl pojem molekulárního povrchového napětí a také významně přispěl k výzkumu gravitace. Pomocí torzních vah změřil s dosud nevídanou přesností gravitační konstantu a dospěl k závěru, že setrvačná a tíhová hmotnost jsou si rovny. Princip ekvivalence těchto hmotností se později stal jedním ze základů teorie relativity.



Obr. 17.1

Ke zkoumání zemské rotace uspořádal Eötvös důmyslný pokus s analytickými vahami. Sňal z nich obě misky a pak je umístil doprostřed na kulatý stůl, který rotoval kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlostí ω . Když nastavil tuto rychlost tak, aby se rovnala úhlové frekvenci vlast-

ních kmitů ramene vah, rameno se rozkývalo. Ukážeme, že se tak stalo v důsledku rotace Země.

Zvolíme souřadnice x, y, z se středem O ve středu zeměkoule, která má poloměr R . Osa z spadá do osy rotace stolku, osa x leží v meridiánové rovině. Úhel ψ značí zeměpisnou šířku, φ otočení ramene, které nahradíme soustavou dvou hmot soustředěných do vzdáleností a od osy náhradního nehmotného ramene. Soustava je znázorněna na obr. 17.1. Objekty, které neleží přímo v průmětnách, jsou v půdorysu označeny čárkou, v narysu dvěma čárkami. Nejprve popíšeme pohyb hmoty umístěné v bodě A a vypočteme příslušné síly. Souřadnice bodu A jsou

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = R.$$

Polohový vektor tedy je

$$\mathbf{r} = \{a \cos \varphi, a \sin \varphi, R\}. \quad (17.1)$$

Protože $\varphi = \omega t$, vyjde vektor relativní rychlosti téhož bodu

$$\mathbf{v} = \{-\omega a \sin \varphi, \omega a \cos \varphi, 0\}. \quad (17.2)$$

Unášivá úhlová rychlost je

$$\mathbf{\Omega} = \{-\Omega \cos \psi, 0, \Omega \sin \psi\}. \quad (17.3)$$

Soustava souřadnic x, y, z je spjatá se Zemí. Úhel ψ je zeměpisná šířka.

Setrvačná síla relativního pohybu je

$$\mathbf{S} = -m d\mathbf{v} / dt = \{m\omega^2 a \cos \varphi, m\omega^2 a \sin \varphi, 0\}. \quad (17.4)$$

Zjevná odstředivá síla vyjde ze vzorce [viz např. LANCZOS (1970)]

$$\mathbf{Q} = -m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (17.5)$$

Její složky vyjdou po rozepsání vektorových součinů

$$Q_x = m\Omega^2 a \sin^2 \psi \cos \varphi + m\Omega^2 R \sin \psi \cos \psi,$$

$$Q_y = m\Omega^2 a \sin \varphi,$$

$$Q_z = m\Omega^2 a \sin \psi \cos \psi \cos \varphi + m\Omega^2 R \cos^2 \psi.$$

Můžeme se přesvědčit, že jde o sílu

$$\mathbf{Q} = m\Omega^2 \mathbf{r}_1, \quad (17.6)$$

kde vektor \mathbf{r}_1 , kolmý na osu zemské rotace a spojující body v půdorysu OA' , má složky

$$x_1 = (R \cos \psi + a \cos \varphi \sin \psi) \sin \psi,$$

$$y_1 = a \sin \varphi,$$

$$z_1 = (R \cos \psi + a \cos \varphi \sin \psi) \cos \psi.$$

Jde tedy o odstředivou sílu unášivého pohybu. Pro Coriolisovu sílu platí vzorec

$$\mathbf{C} = m(-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (17.7)$$

Její složky vyjdou

$$C_x = 2m\Omega\omega a \sin \psi \cos \varphi,$$

$$C_y = 2m\Omega\omega a \sin \psi \sin \varphi,$$

$$C_z = 2m\Omega\omega a \cos \psi \cos \varphi.$$

Když složíme síly působící na obě hmoty, dostaneme konstantní silovou výslednici

$$\mathbf{Q}_0 = \{2m\Omega^2 R \sin \psi \cos \psi, 0, 2m\Omega^2 R \cos^2 \psi\}, \quad (17.8)$$

která se v závěsu vah skládá s gravitační silou. Je to korekce tíhy se zřetelem k rotaci Země.

Kromě toho vzniknou dvě silové dvojice s periodickým časovým průběhem. Jedna působí kolem osy z a vede k nerovnoměrnosti záběrového momentu pohánějícího stůl. Její moment je

$$M_z = m\Omega^2 a \cos^2 \psi \sin(2\omega t). \quad (17.9)$$

Druhá dvojice působí rozkývání ramene vah. Má moment

$$M_C = 2m\Omega^2 a^2 \sin \psi \cos \psi \cos \omega t + 4m\Omega\omega a^2 \cos \psi \cos \omega t. \quad (17.10)$$

Protože Ω je velmi malé, totiž

$$\Omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

můžeme členy s kvadrátem této veličiny zanedbat. Zbývá pouze

$$M_C = 4m\Omega\omega a^2 \cos \psi \cos \omega t. \quad (17.11)$$

Je to moment vzniklý působením vertikálních složek Coriolisových sil. Postačí k vybuzení rezonančního kmitání, jsou-li váhy dostatečně citlivé.

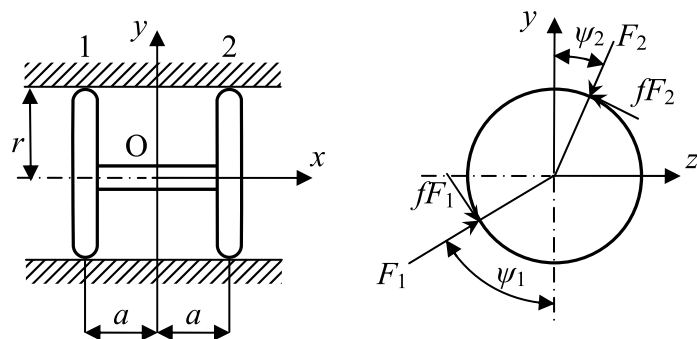
Budící moment M_C je podle (17.11) přímo úměrný úhlové rychlosti zemské rotace. Závisí též na zeměpisné šířce. Na rovníku by byl největší, neboť tam je $\cos\psi = 1$. Na pólech by byl nulový, tam by Eötvösův experiment selhal.

O jednom paradoxu v mechanice tuhých těles

Od samého počátku byla přijímána s rozpaky existence tzv. suchého tření mezi tělesy v mechanické soustavě. Vedly se spory o podstatě tohoto jevu i o zákonech, jimiž je popsán. Nejčastěji se v aplikacích předpokládá, že se suché tření řídí Coulombovým zákonem $|T| \leq fN$, kde N je normálová a T tečná složka reakce přenášené mezi dvěma dotýkajícími se tělesy, f je součinitel smykového tření. Nerovnost platí při adhezi, rovnost při relativním pohybu. Síla N je tlaková, síla T působí proti relativnímu pohybu.

Základem mechaniky tuhých těles je předpoklad existence absolutně tuhého (nedeformovatelného či nepoddajného) tělesa.

Oba zmíněné předpoklady jsou pouhou idealizací složité skutečnosti, a proto mohou vést, jak ukážeme na jednom příkladu, k paradoxním důsledkům [WILMS, COHEN (1997)].



Obr. 18.1

Představme si absolutně tuhé těleso, které se skládá ze dvou tenkých kotoučů spojených hřídelem. Kotouče mají poloměr r a hřídel má délku $2a$ (obr. 18.1). Těleso je vsunuto s velmi malou vůlí do nepohyblivého a rovněž nepoddajného válce. Rotuje s úhlovou rychlostí ω_x . Těleso je staticky vyváženo a jeho tíhu neuvažujeme. (Můžeme si představit, že hřídel má svislou osu a vlastní tíha je zachycena bez tření axiálním ložiskem.) Vlivem

nějaké zbytkové dynamické nevyváženosti se kotouče dotknou válce. Budeme předpokládat bodový dotyk. Na první kotouč bude působit normálová složka reakce F_1 a tečná složka fF_1 ; poloha působišť je dána úhlem ψ_1 . Na druhý kotouč bude obdobně působit reakce o složkách F_2, fF_2 s působišťem určeným úhlem ψ_2 .

Předpokládejme, že těžiště splývá s počátkem O souřadnic x, y, z spjatých s tělesem a že se jeho poloha nemění. Pak uvedené síly musí mít nulovou výslednici. Platí tedy podmínky

$$F_1(\cos\psi_1 - f \sin\psi_1) - F_2(\cos\psi_2 - f \sin\psi_2) = 0, \quad (18.1)$$

$$F_1(\sin\psi_1 + f \cos\psi_1) - F_2(\sin\psi_2 + f \cos\psi_2) = 0. \quad (18.2)$$

Mají-li být síly F_1, F_2 různé od nuly, musí vymizet determinant soustavy. Odtud dostaneme po úpravě podmínku

$$(1 + f^2)\sin(\psi_1 - \psi_2) = 0. \quad (18.3)$$

Této rovnici vyhovíme, bude-li $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. Z rovnic (18.1) a (18.2) pak dostaneme $F_1 = F_2 = F$. Druhé možné řešení $\psi_2 = \psi_1 + \pi$ by vedlo k výsledku $F_2 = -F_1$, což nemůže z fyzikálních důvodů platit (dotyková síla nemůže být tahová). Je zřejmé, že obě reakce tvoří silovou dvojici. Momenty sil k souřadnicovým osám pak jsou

$$M_x = -2frF, \quad (18.4)$$

$$M_y = 2aF(\sin\psi + f \cos\psi), \quad (18.5)$$

$$M_z = 2aF(-\cos\psi + f \sin\psi). \quad (18.6)$$

Zavedeme-li ve směrech souřadnicových os x, y, z jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, bude moment silové dvojice

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}M_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z. \quad (18.7)$$

Pro moment hybnosti \mathbf{L} tělesa bude platit vztah

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}L_x + \mathbf{j}L_y + \mathbf{k}L_z, \quad (18.8)$$

kde

$$L_x = I_{xx}\omega_x, \quad (18.9)$$

$$L_y = -D_{yx} \omega_x, \quad (18.10)$$

$$L_z = -D_{zx} \omega_x, \quad (18.11)$$

neboť $\omega_y = 0, \omega_z = 0$. Zde I_{xx} je moment setrvačnosti k ose x , kdežto D_{yx}, D_{zx} jsou deviační momenty. Z věty o momentu hybnosti dostáváme pohybovou rovnici

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \quad (18.12)$$

kde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} \omega_x$. Poslední člen v rovnici (18.12) vzniká vlivem rotace souřadnicového systému spojeného s tělesem. Jde o vektorový součin úhlové rychlosti a momentu hybnosti. Rozepíšeme-li vektorovou rovnici (18.12) do skalárních složek, dostaneme

$$M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x, \quad (18.13)$$

$$M_y = -D_{yx} \dot{\omega}_x + D_{zx} \omega_x^2, \quad (18.14)$$

$$M_z = -D_{zx} \dot{\omega}_x - D_{yx} \omega_x^2. \quad (18.15)$$

Z rovnic (18.5) a (18.6) můžeme úhel ψ vyloučit. Bude

$$M_y^2 + M_z^2 = (1 + f^2) \cdot 4a^2 F^2. \quad (18.16)$$

Když sem dosadíme z rovnic (18.14) a (18.15), vyjde

$$(D_{yx}^2 + D_{zx}^2) \dot{\omega}_x^2 + (D_{yx}^2 + D_{zx}^2) \omega_x^4 = (1 + f^2) \cdot 4a^2 F^2. \quad (18.17)$$

Sílu F , která se vyskytuje na pravé straně (18.17), můžeme vyjádřit pomocí vztahů (18.4) a (18.13). Po úpravě dostaneme poslední rovnici ve tvaru

$$\left[(1 + f^2) a^2 I_{xx}^2 - f^2 r^2 (D_{yx}^2 + D_{zx}^2) \right] \dot{\omega}_x^2 = \left[f^2 r^2 (D_{yx}^2 + D_{zx}^2) \right] \omega_x^4. \quad (18.18)$$

Podíl obou hranatých závorek označíme α^2 , takže

$$\alpha^2 = \frac{f^2 r^2 (D_{yx}^2 + D_{zx}^2)}{(1 + f^2) a^2 I_{xx}^2 - f^2 r^2 (D_{yx}^2 + D_{zx}^2)}. \quad (18.19)$$

S tím získává rovnice (18.18) jednoduchý tvar

$$\dot{\omega}_x = -\alpha \omega_x^2, \quad \alpha = \sqrt{\alpha^2}. \quad (18.20)$$

Znaménko minus bylo vybráno proto, že podle rovnic (18.4) a (18.13) musí být $\dot{\omega}_x < 0$. Nyní je již snadné rovnici (18.20) vyřešit. Vyjde

$$\omega_x = \frac{\omega_{x0}}{1 + \alpha \omega_{x0} t}, \quad (18.21)$$

kde ω_{x0} je počáteční úhlová rychlost (integrační konstanta). Podle rovnice (18.21) klesá úhlová rychlost s časem asymptoticky k nule. To je však pravda jen tehdy, je-li α reálné číslo. Při určité hodnotě poměru r/a bude α nekonečné, což znamená, že rotace okamžitě zanikne. Vyjde-li α imaginární, nemá rovnice (18.20) reálné řešení. To je tzv. *Painlevův paradox*. Negativní hodnotu α^2 dostaneme, zvolíme-li poměr r/a dostatečně velký, jak je vidět z rovnice (18.19).

Paradox nevzniká, je-li těleso dokonale vyváženo. Tehdy vymizí devi-
ační momenty, $\alpha = 0$, $\omega_x = \omega_{x0}$, $F = 0$. Nevznikne však ani tehdy, vzdáme-
li se představy absolutně tuhého tělesa. Důkaz tohoto tvrzení přesahuje roz-
sah našeho příspěvku. V něm jsme ukázali, že představa absolutně tuhého
tělesa může být s Coulombovým zákonem suchého tření neslučitelná.

Bouassův-Sardův regulátor

Čas již dávno neodměřují jen dlouhá kyvadla pendlovek s těžkými závažími, vždyť i neklidný pohyb spirálových pružinek nepokojů nahradily v hodinách a hodinkách miniaturní kmitající křemenné destičky. Mechanické regulátory, nepostradatelné součásti mnoha strojů klasické stavby, byly rovněž většinou nahrazeny elektronickými řídicími prvky. Ty sice udivují svými výkony a možnostmi, ale přesto v laické mysli nebudí takový pocit až posvátné úcty, jakou pocítujeme k lidskému důmyslu a řemeslné dokonalosti nad některými exponáty při návštěvě technického muzea. Je to nesporně tím, že počítače současné generace pracují způsobem, který neškořená mysl nedokáže pochopit. Existují však i mechanické regulátory, jejichž činnost lze jen obtížně chápat bez souběžného teoretického rozboru. Takovým je regulátor Bouasse a Sardy, jehož popis a teorii zde ve stručnosti uvedeme. Jeho teorie pochází z roku 1958, najdeme ji však v monografii ROSEAU (1987). V tomto příspěvku se omezíme pouze na matematický popis založený na intuici, který bychom mohli nazvat heuristický.

Na konci horizontálního klikového hřídele je upevněn buben s momentem setrvačnosti J , z něhož se na poloměru R odvíjí nehmotné lano se závažím o hmotnosti M (obr. 19.1). Pod tíhou tohoto závaží se buben otáčí úhlovou rychlostí $\omega = d\varphi/dt$. Úhel φ svírá rameno kliky s vodorovnou rovinou. Ke klice je připojeno dlouhé táhlo zakončené pružinou o tuhosti k , pod níž je upevněno závaží o hmotnosti m . Zatímco pohyb prvního závaží se děje rychlostí $\omega(t)R$, pohyb druhého závaží je popsán posuvem $y(t)$ a rychlostí $\dot{y} = dy/dt$. Oba pohyby jsou tlumeny, přičemž jde o lineární viskózní tlumení s konstantami f , popř. b .

Zanedbáme-li úhlovou odchylku táhla od svislice, což je možné, je-li táhlo relativně dlouhé, dostaneme pohybové rovnice ve tvaru

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = kr \sin \varphi - mg, \quad (19.1)$$

$$(J + MR^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = MgR + k(y - r \sin \varphi)r \cos \varphi - f \frac{d\varphi}{dt}. \quad (19.2)$$

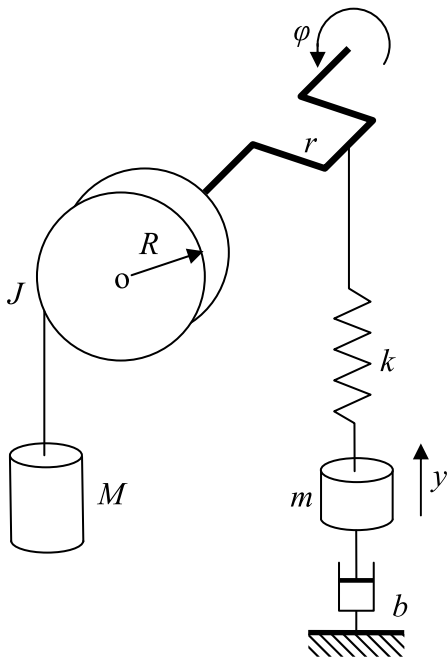
Pro přehlednost zavedeme označení

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\varepsilon p = \frac{b}{m}, \quad \mu = \frac{MR^2}{J + MR^2}.$$

Rovnice (19.1) a (19.2) tak dostaneme ve tvaru

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon p \frac{dy}{dt} + p^2 y = p^2 r \sin \varphi - g, \quad (19.3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \mu \left[\frac{g}{R} + \frac{kr}{MR^2} (y - r \sin \varphi) \cos \varphi - \frac{f}{MR^2} \frac{d\varphi}{dt} \right]. \quad (19.4)$$



Obr. 19.1

Má-li buben velký moment setrvačnosti v porovnání se součinem MR^2 , je parametr μ malý. Tehdy je podle (19.4) malé i zrychlení. To znamená, že rychlost pohybu bubnu, a tím i závaží o hmotnosti M bude skoro konstant-

ní, pohyb se bude jen zvolna zrychlovat. Zkusme prozkoumat, zda existuje možnost zcela rovnoměrného pohybu $\omega = \omega_0 = \text{konst.}$ Když tuto hodnotu dosadíme do (19.3), tj. operátor d/dt nahradíme operátorem $\omega_0 d/d\varphi$, dostaneme

$$\omega_0^2 \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + 2\varepsilon p \omega_0 \frac{dy}{d\varphi} + p^2 y = p^2 r \sin \varphi - g. \quad (19.5)$$

Tato rovnice má zřejmě partikulární integrál

$$y = -\frac{g}{p^2} + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi, \quad (19.6)$$

kde

$$\alpha = \frac{2p^3 \varepsilon \omega_0 r}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \omega_0^2}, \quad \beta = \frac{(p^2 - \omega_0^2) p^2 r}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \omega_0^2}. \quad (19.7)$$

Podle (19.6) bude y periodickou funkcí úhlu φ , takže úhlové zrychlení nebude podle (19.2) resp. (19.4) úplně nulové. Budeme však požadovat, aby bylo v průměru co nejmenší. Výraz (19.6) proto dosadíme do (19.2) a integrál přes jednu periodu položíme na roveň nule:

$$\int_0^{2\pi} \left[MgR + kr(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - \frac{g}{p^2} - r \sin \varphi) \cos \varphi - f\omega_0 \right] d\varphi = 0. \quad (19.8)$$

Tuto podmínku můžeme po integraci upravit s použitím (19.7) do bezrozměrového tvaru

$$\frac{MgR}{kr^2} - \frac{f\omega_0}{kr^2} - \frac{\varepsilon \omega_0 p^3}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \omega_0^2} = 0. \quad (19.9)$$

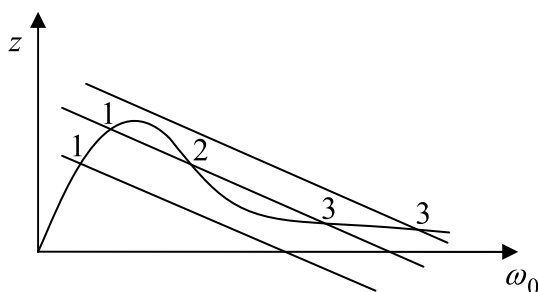
To je algebraická rovnice pro neznámou úhlovou rychlost ω_0 . Snadno lze ukázat, že tato rovnice má nejméně jeden a nejvíce tři reálné kořeny. V rovině s kartézskými souřadnicemi ω_0, z podle obr. 19.2 dostaneme řešení jako průsečík křivky

$$z = \frac{\varepsilon \omega_0 p^3}{(p^2 - \omega_0^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \omega_0^2} \quad (19.10)$$

s přímkou

$$z = \frac{MgR}{kr^2} - \frac{f\omega_0}{kr^2}. \quad (19.11)$$

Je zřejmé, že tento průsečík je buď jeden, nebo jsou průsečíky tři, z nichž dva splývají, nebo jsou tři různé. Obecně tedy existují nejvýše tři reálná řešení, tj. tři navzájem různé konstantní úhlové rychlosti, a zbývá posoudit jejich fyzikální význam. Veličinu vypočtenou podle (19.11) můžeme považovat za budicí moment v bezrozměrovém tvaru, který uvádí do zrychleného pohybu buben se zavěšeným závažím. Veličina z podle (19.10) je reakce mechanismu směřující proti tomuto pohybu. Vychýlíme-li se z bodu 1 na obr. 19.2 poněkud vlevo, tj. poklesne-li úhlová rychlost, bude hnací moment větší než reakce a úhlová rychlost se zvětší. Jestliže se vychýlíme vpravo, bude tomu naopak, a úhlová rychlost se zmenší. To znamená, že pohyb daný kořenem v bodu 1 je stabilní. Obdobný rozbor platí i pro bod 3. Zato u bodu 2 se ukáže, že každá fluktuace se spontánně zvětšuje, takže pohyb daný tímto bodem je nestabilní. Platí tedy, že stabilní pohyb nastává jen pro oba krajní kořeny (1 resp. 3). To znamená, že existuje jedna úhlová rychlost, popř. dvě, na nichž se stabilně udrží rovnoměrný pohyb (s malými fluktuacemi).



Obr. 19.2

Zkusme navrhnout pro lepší představu o funkci regulátoru nějaké konkrétní hodnoty, podle kterých bychom mohli postavit jeho model. Zvolíme například $M = 10$ kg, $m = 40$ kg, $k = 1000$ kg.s⁻², $R = 0,45$ m, $r = 0,3$ m, $b = 200$ kg.s⁻¹, $f = 1,8$ kg.m².s⁻¹. Vyjde $p = 5$ s⁻¹, $\varepsilon = 0,5$. Numerickým řešením rovnice (9) dostaneme tři reálné kořeny, a to $\omega_1 = 3,279$ s⁻¹, $\omega_2 = 5,896$ s⁻¹, $\omega_3 = 24,79$ s⁻¹. To znamená, že existují dvě možné skoro konstantní

rychlosti pohybu břemene M , a to $v_1 = 1,48 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 = 11,16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Výchylku y hmoty m dostaneme pro první kořen podle rovnice (6) (v metrech)

$$y = -0,4 + 0,2606 \cos \omega_1 t + 0,2264 \sin \omega_1 t .$$

Amplituda tohoto harmonického pohybu tedy bude $a = 0,3452 \text{ m}$. Překvapuje nás, že je větší než poloměr kliky. Musíme si však uvědomit, že za rovnoměrného pohybu se musí úbytek potenciální energie hmoty M během jedné otočky hřídele rovnat energii rozptýlené tlumením. Skutečně, energie rozptýlená tlumičem je $A_1 = \pi \omega_1 a^2 b = 245,5 \text{ J}$, rotačním pohybem se rozptýlí $A_2 = 2\pi f \omega_1 = 37,1 \text{ J}$, takže celkem se rozptýlí $A_1 + A_2 = 282,6 \text{ J}$. Úbytek potenciální energie je $A = 2\pi MgR = 282,7 \text{ J}$. Mělo by být $A = A_1 + A_2$. Shoda však nemůže být přesná, neboť ani naše teorie není přesná. Na pravé straně rovnice (19.9) není totiž nula, ale malý konstantní člen a ještě periodická funkce úhlu $\varphi = \omega_1 t$. Má-li být tento výraz co nejbližší nule, musí být parametr μ malý. To znamená, že buben musí mít relativně velký moment setrvačnosti.

Prakticky zaměřený čtenář se může ptát, k čemu je to dobré. Odpovíme mu upřímně, že k ničemu. Sotva by se dnes nějaký konstruktér odvážil tímto mechanismem regulovat rychlost výtahu nebo těžní klece. Bouassův-Sardův regulátor je však krásným příkladem mechanické soustavy s nelineární vnitřní vazbou, a může sloužit například k potěše myslí přemýšlivého čtenáře.

Humor a hračky v učebnicích mechaniky

Podle autorova názoru by učebnice měly čtenářům přinášet nejen poučení, ale také trochu zábavy. Když autor pátral ve své paměti po možných zdrojích takové zábavy, vzpomněl si na znamenitou učebnici matematiky*, kterou v poválečných letech napsal pro rakouské studenty vídeňský vysokoškolský profesor Adalbert Duschek (1895–1957). V úvodu vysvětloval, proč se ujal tak nevděčného úkolu napsat učebnici. Prvním důvodem, proč jsou učebnice psány, může být, že autor zná cosi, co dosud nebylo sděleno – ale to není můj případ, napsal profesor Duschek. Druhým důvodem může být, že si autor potřebuje vydělat. Ale kdo zná rakouský poválečný daňový systém, ten ví, že je to nemožné. Zbývá poslední důvod: učebnice tohoto druhu není na trhu, a je jí velmi zapotřebí.

Profesor Duschek nebyl příznivcem německého národního socialismu, a tak byl roku 1938 ze svého učitelského místa propuštěn. Vrátil se mohl až roku 1945, kdy se stal členem rakouské Spolkové rady za stranu SPÖ a také přednostou Matematického ústavu Technického vysokého učení ve Vídni (Technische Hochschule Wien). Tam působil až do své smrti roku 1957.

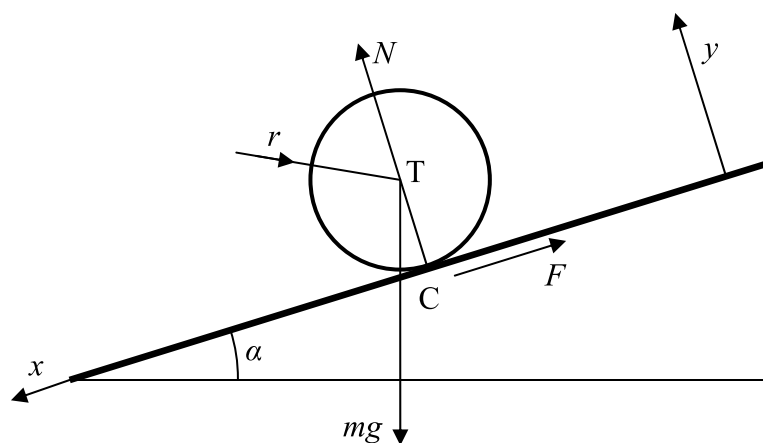
Autorovi bylo nápadné, že v žádné z učebnic matematiky, které se mu dostaly do ruky a které byly vydány později, nenalezl odkaz na Duschkovu publikaci, dokud mu vysvětlení nepřinesla náhoda. Vzpomněl si totiž na jinou podobnou knihu, rovněž psanou s jistou dávkou humoru, věnovanou tentokrát mechanice. Ležela zapomenutá ve sklepním depozitáři knihovny, její papír byl zkřehlý a zažloutlý, desky poznamenány plísní. Byl to čínský reprint anglického originálu z roku 1948, vydaný v Šanghaji v padesátých letech. Ten se u nás nesměl šířit, protože by to znamenalo porušení autorových práv. Takové mezinárodní závazky Čínská lidová republika – na rozdíl od Československé republiky – tehdy neuznávala. U nás byla proto kniha opatřena razítkem oznamujícím, že nesmí být prodávána ani jinak šířena, ale přesto ji bylo možno koupit v prodejně *Sovětská kniha* za pouhých Kčs

* *Vorlesungen über höhere Mathematik*, sv. I až IV, Wien 1949–1961.

36,70 (v tehdejší měně, po reformě by to bylo 7,35 Kčs). Autor knihy s názvem *Mechanics* byl Jacob Pieter Den Hartog, profesor strojního inženýrství na Massachusetts Institute of Technology.*

V úvodu konstatuje profesor Den Hartog, že žádné prestižní nakladatelství nevydá knihu bez titulního listu a bez předmluvy. Titulní list čtenáři samozřejmě uvítají, ale předmluvu většinou považují za zbytečnou a nezájímavou. Existují však výjimky. Dobré předmluvy psali prý například George Bernard Shaw, Oliver Heaviside a Henri Bouasse. Předmluvy G. B. Shawa byly nesrovnatelné, rozkošně zábavné a zároveň plné moudrosti. Ostatní dva autoři napsali také zábavné předmluvy, ale bylo v nich skryto zraňující ostří. Oliver Heaviside urazil „cambridgeské matematiky“, když zdráhavě připustil, že „dokonce i oni jsou lidé“. A Henri Bouasse si s vrozeným galským vtípem postěžoval, že členové Francouzské akademie věd mají v košilích více škrobu než je autorovi milé. Takové věty, jakkoli vtipné, jejich autorům k dobru nijak neposloužily. Zapomněli totiž na základní zákony mechaniky, které ovládal i Sancho Panza. Když jeho pán Don Quijote zápasil s větrnými mlýny, Sancho Panza si prý mezi vousy mručel cosi o relativním pohybu a o třetím Newtonově zákonu. Věděl, že mlýny zasáhnou jeho pána tak tvrdě, jak on zasáhne je. A totéž se stalo pánům Heavisideovi a Bouassovi. Ctihodní pánové s naškrobenými košilemi nikdy nezvolili Bouasse členem své slovatné akademie, a pokud jde o Heavisidea a jeho matematiky, pak *Heavisideův operátorový počet* se po deseti letech jmenoval už jenom *Teorie Laplaceovy transformace* a také *Heavisideova vrstva* byla přejmenována na *ionosféru*. Zkrátka kdo chce nosit dobře vyprané košile, musí si dávat dobrý pozor na to, co napíše do předmluvy své knihy. Nejlépe je držet se suchých faktů, například že předkládaný učební text je určen pro dvousemestrový předmět inženýrského curricula. Toto poučení přišlo pro profesora Duschka zřejmě příliš pozdě.

* Poslední, dosud dostupné a legální vydání této publikace vyšlo v nakladatelství Dover Publications, série Dover Books on Physics, v červnu roku 1961.



Obr. 20.1

Den Hartogova *Mechanika* podává na 462 stranách svědectví o autorově pedagogickém mistrovství. Teorie je názorně vykládána a ihned aplikována na řešených příkladech, které rozvíjejí čtenářovu inženýrskou představivost. Kromě toho je připojeno 334 neřešených úloh s připojenými kontrolními výsledky. Týkají se nejen různých strojních a stavebních konstrukcí a mechanismů, ale také hraček a dokonce jednoho perpetua mobile. Uvedeme jednoduchý příklad valení tělesa po nakloněné rovině (bez valivých odporů). Pro takové těleso, znázorněné na obr. 20.1, můžeme v souřadnicích x, y napsat tyto pohybové rovnice:

$$N - mg \cos \alpha = m\ddot{y} = 0, \quad (20.1)$$

$$mg \sin \alpha - F = m\ddot{x}, \quad (20.2)$$

$$Fr = I_T \ddot{\varphi}. \quad (20.3)$$

Z první rovnice je zřejmé, že normálová reakce je nezávislá na druhu pohybu. Platí pro ni vztah

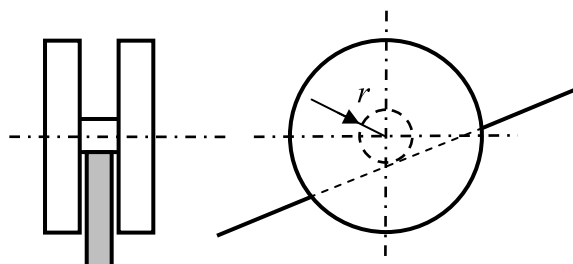
$$N = mg \cos \alpha. \quad (20.4)$$

Zbývající dvě rovnice obsahují tři neznámé, a to \ddot{x} , $\ddot{\varphi}$ a F . Chybějící rovnici nám dodá podmínka čistého valení $\dot{x} = r\dot{\varphi}$ resp. $\ddot{x} = r\ddot{\varphi}$. Řešení dané úlohy je

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + (I_T / mr^2)}, \quad (20.5)$$

$$F = \frac{I_T}{r^2} \ddot{x}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}. \quad (20.6), (20.7)$$

Kdyby se těleso bez tření klouzalo (nevalilo se), bylo by $\ddot{x} = g \sin \alpha$. To předpokládal Galileo Galilei, když vyšetřoval pohyb při volném pádu. Bylo nad jeho možnosti měřit průběh rychlého pohybu padajícího tělesa, a tak se rozhodl tento pád „zpomalit“ na nakloněné rovině. Aby odstranil rušivé tření, pouštěl po nakloněném prkně kuličky. Na prkně vyrobil zářezy ve vzdálenostech 1, 4, 9, 16, 25 dm od startu a poslouchal, zda na nich kuličky ťukají ve stejných časových intervalech, což byl důkaz rovnoměrně zrychleného pohybu. Galilei však netušil, že mezi pohybem tělesa, smýkajícího se bez tření, a tělesa, které se valí, je rozdíl daný druhým členem ve jmenovateli rovnice (20.5). Proto byly hodnoty gravitačního zrychlení g , které naměřil, systematicky menší oproti správné hodnotě o 29 % (moment setrvačnosti homogenní koule k její centrální ose je totiž $I_T = (2/5)mr^2$). Kdyby použil válečků, byla by chyba dokonce 33 %. Největší chyba by vznikla při valení prstence, pro který je přibližně $I_T = mr^2$, a to 50%. Tehdy by byl vliv momentu setrvačnosti na zpomalení pohybu největší. Ale nelze tento vliv přece jenom ještě dále zvětšit?



Obr. 20.2

Ukazuje se, že to lze velmi jednoduše. Stačí vyrobit těleso podle obr. 20.2. Pak není obtížné zpomalit valivý pohyb třeba desetkrát nebo i více. Je ovšem třeba si ověřit, zda valení skutečně nastává. To je dáno nejen kine-

matickou podmínkou $x = r\varphi$, ale také zákonem smykového tření. Nemá-li nastat smyk, musí být $F < fN$, kde f je součinitel tření. Těleso se tedy může klouzat, místo aby se valilo, je-li splněna podmínka

$$\frac{F}{N} = \frac{I_T}{r^2} \frac{g \sin \alpha}{[1 + (I_T / mr^2)] mg \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + (mr^2 / I_T)} \geq f. \quad (20.8)$$

V takovém případě je třeba analýzu pozměnit. Rovnice (20.1) platí i nadále, ale rovnice (20.2) a (20.3) nyní budou

$$mg \sin \alpha - fN = m\ddot{x}, \quad (20.2a)$$

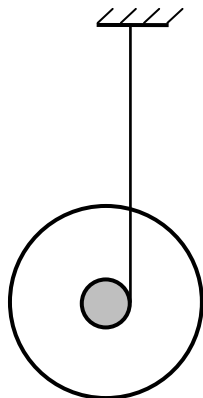
$$fNr = I_T \ddot{\varphi}. \quad (20.3a)$$

Řešení je

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (20.5a)$$

$$\ddot{\varphi} = r f m g \cos \alpha / I_T. \quad (20.7a)$$

Klouzající se těleso nemůže samo sebe předběhnout, takže musí být splněna nerovnost $r\ddot{\varphi} \leq \ddot{x}$. Odtud dostaneme pomocí (20.5a) a (20.7a) pro součinitel tření f znovu podmínku (20.8).



Obr. 20.3

Dalo by se nějak zajistit, aby se těleso i při velkém úhlu α valilo? Zajisté, je to jednoduché. Stačí kolem tělesa navinout v nějaké drážce lanko, které zabrání kluzu, a pak může být třeba $\alpha = \pi/2$ (obr. 20.3). To je však

hračka Jo-Jo! Budeme-li lanko pevně držet v určité poloze, bude kotouček klesat s konstantním zrychlením

$$\ddot{x} = \frac{g}{1 + (I_T/mr^2)} \quad (20.9)$$

podle rovnice (20.5), a to může být třeba desetkrát nebo i patnáctkrát menší než tíhové zrychlení g . Stačí vhodně zvolit poměr I_T/mr^2 . Vzorec (20.9) platí pro $x \leq h$ (což je délka lanka).

Pokud bychom zanedbali ztráty, vrátí se kotouček hračky Jo-Jo do původní výše a pak se bude jeho sestup opakovat. Kdo bude přitom držet provázek, ucítí v něm šubnutí, a to v okamžiku, kdy je kotouč nejnižší. To je silový impuls, který mění smysl hybnosti kotoučku. Můžeme předpokládat, že svislý směr lanka se zřetelně nezmění. V nejnižším bodě $x = h + r = x_0$ bude mít kotouček úhlovou rychlost $\dot{\varphi}_0$, kterou vypočteme z rovnosti energií

$$mg(h+r) = \frac{1}{2} I_T \dot{\varphi}_0^2. \quad (20.10)$$

Připomeňme, že h značí celkovou délku lanka a r poloměr drážky, kolem které se lanko odvíjí. Rychlost \dot{x} je v nejnižším bodě nulová. Zrychlení \ddot{x} , jak se snadno přesvědčíme, se zde rovná hodnotě

$$\ddot{x}_0 = -\dot{\varphi}_0^2 r, \quad (20.11)$$

takže maximální síla v lanku vyjde

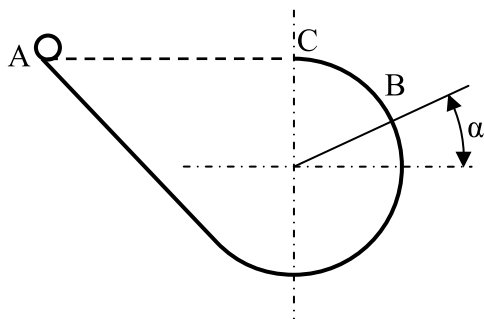
$$F_0 = mg + mr\dot{\varphi}_0^2 = mg \left[1 + 2 \left(\frac{mr^2}{I_T} \right) \left(1 + \frac{h}{r} \right) \right]. \quad (20.12)$$

Při skutečném pohybu hračky vznikají ztráty, které je třeba kompenzovat, aby se periodický pohyb kotouče udržel. Děje se tak pohybem ruky, který mění skleronomní soustavu na reonomní, a ta – jak známo – není konzervativní. Vycítit, jaké mají být tyto pohyby, je věcí zkušenosti a zručnosti hráče. Kdo by chtěl o hračkách vědět více, může si nalistovat Bulletin České společnosti pro mechaniku č.2 (1981), str. 9–31, nebo 2. číslo zpravodaje GAMM, červenec 1980.

Vraťme se ještě k odvození rovnice (20.5) původní úlohy podle obr. 20.1. Protože bod C je okamžitým středem otáčení, nabízí se možnost zkráceného odvození této rovnice:

$$mgr \sin \alpha = I_C \ddot{\phi} = (I_T + mr^2) \ddot{\phi}. \quad (20.13)$$

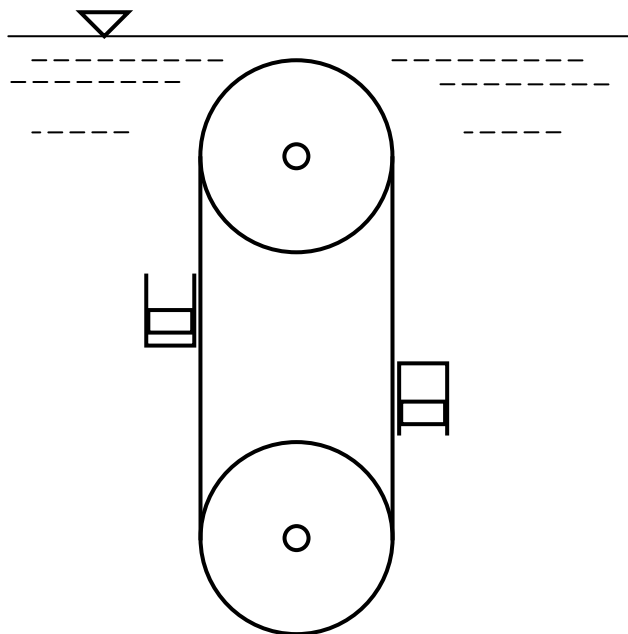
Když tuto hodnotu dosadíme do (20.7), dostaneme (20.5). Výsledek (20.13) je sice správný, ale jeho odvození chybné. Rovnice (20.13) by platila, kdyby osa C byla pevnou osou otáčení (což není z technických důvodů v daném případě možné). Tehdy by bylo zrychlení bodu C nulové, kdežto v těžišti by bylo dostředivé zrychlení $\ddot{y}_T = -r\dot{\phi}^2$. Podle d'Alembertova principu bychom museli v těžišti připojit ve směru osy y setrvačnou sílu $S = mr\dot{\phi}^2$. Ve skutečnosti je bod C pouze pólem relativního pohybu, a tedy okamžitou osou otáčení. Zrychlení těžiště je ve směru osy y nulové, jak je zřejmé už z rovnice (1), zatímco bod C na okraji kotouče má zrychlení $\ddot{y}_C = r\dot{\phi}^2$. Oba případy se tedy liší. Shoda výsledku získaného zkráceným postupem podle (20.13) se správným výsledkem (20.5) je umožněna pouze tím, že setrvačná síla S nemá k těžišti žádné rameno, a tedy ani moment, a těžiště spadá do osy kola. V obecném případě by tomu tak nemuselo být a zkrácený způsob odvození výsledku by dal chybné hodnoty.



Obr. 20.4

Co se student na tomto příkladu naučil, může uplatnit mimo jiné při řešení úlohy o homogenní kuličce, kterou vypustíme s nulovou počáteční rychlostí z bodu A po dráze znázorněné na obr. 20.4. Skládá se z nakloněné roviny, svírající s vodorovnou rovinou úhel 45^0 , a ze zakřivené dráhy ve

tvaru kružnice se středovým úhlem 225° . Ta na nakloněnou rovinu hladce navazuje a končí v bodě C ve stejné výši, jakou má počáteční bod A. Ptáme se, jaký bude pohyb kuličky, bude-li valivý odpor zanedbatelný. Povrchně uvažující čtenář by mohl usoudit, že se kulička zastaví až v bodě C, protože soustava je konzervativní, a pak spadne. Přemýšlivý čtenář však ví, že tomu tak nemůže být. Kulička se od dráhy oddělí už v bodě B, pro který vyjde úhel $\alpha = 36^{\circ}$.



Obr. 20.5

Na těchto příkladech jsme se přesvědčili, že i velmi jednoduchá úloha může být bohatým zdrojem poučení a radosti pro každého přemýšlivého studenta i jeho učitele. Dobrý učitel ovšem neučí studenty memorovat poučky, ale objevovat pravdy. Osvojené metody si pak student může sám vyzkoušet na zadaných neřešených úlohách s uvedenými kontrolními výsledky. Poslední taková úloha v Den Hartogově knize se týká perpetua mobile podle obr. 20.5. Jde o nekonečný pás ovinutý kolem dvou kotoučů, na němž jsou připevněny v pravidelných roztečích válce a v nich těžké písty;

ty se ve válkách pohybují bez tření a bez netěsností. Pod nimi je uzavřeno určité váhové množství vzduchu, ve všech válkách stejné. (z válců jsou zakresleny pouze dva) a celá sestava je ponořena do kapaliny. Je zřejmé, že na levé straně se vzduch tíhou pístů stlačuje a na pravé naopak roztahuje. Proto se písty na levé straně nacházejí blíže ke dnu válce než na pravé straně. Vztlak podle Archimédova zákona je proto na pravé straně větší než na levé, takže se pás dá do pohybu proti hodinovým ručičkám.

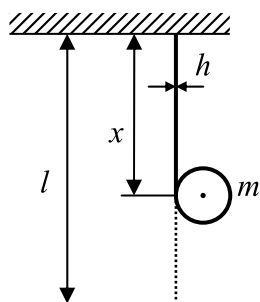
Čtenář, který si s tímto problémem neporadí, se zajisté podívá do kontrolních výsledků a najde tam překvapivou radu: *Zeptejte se svých přátel při dnešní večeři.*

Podobně jako je zajímavá a poutavá Den Hartogova učebnice, je zajímavý a poutavý i životní příběh jejího autora. Jeho otec Maarten Den Hartog byl učitelem v Amsterodamu. Ve známé Dreyfusově aféře v letech 1894–1899 se jednoznačně postavil na stranu tohoto židovského důstojníka francouzské armády, který byl neprávem odsouzen za velezradu a uvězněn na Ďábelských ostrovech. Obnovy Dreyfusova procesu a jeho rehabilitace nakonec dosáhl spisovatel Émile Zola, ale Maartenu Den Hartogovi to už nepomohlo. Byl propuštěn a útočiště našel až v holandských državách dálného východu, kde se mu na Jávě roku 1901 narodil syn Jacob Pieter, kterého matka mazlivě oslovovala „Jaapie“. Malý Jaapie se naučil mluvit holandsky i malajsky a hrál také na housle. Byl mimořádně nadaný, a tak se rodiče rozhodli, že se pokusí znovu zakotvit ve své otčině, aby mu mohli dopřát řádné vzdělání. Protože Holandsko nebylo ve válce, matka s Jaapiem a jeho dvěma sestřičkami, Wilhelminou a Clarou, se roku 1916 vrátila zpět do Amsterodamu. Cesta lodí, na níž se plavili, byla tehdy dosti krkolomná – plavili se kolem Mysu Dobré naděje (Suezský průplav byl pro ně uzavřen) a kolem Islandu. Otec Maarten zůstal na Jávě, aby rodinu existenčně zabezpečoval, záhy však zemřel, a pro rodinu nastaly zlé časy. Jacoba Pietera podporovali na studiích příbuzní. Vystudoval elektrotechnické inženýrství, ale nemohl najít uplatnění. Když byla i po druhé zamítnuta jeho žádost o zaměstnání, rozhodl se vycestovat do USA. Tam statečně čelil všem obtížím, rozhodnut vydržet a prorazit, což se mu skutečně podařilo. Po nějaké

době mohl nastoupit u firmy Westinghouse, která ho zařadila do zvláštního kurzu pro začínající inženýry. Tam se setkal se skvělým a moudrým učitelem, rovněž emigrantem, profesorem Štěpánem P. Timošenkem. Ten si všiml jeho talentu a najal ho jako svého asistenta. Timošenko mu umožnil vystudovat matematiku na universitě v Pittsburgu a zároveň ho „přeškolil“ na znalce mechaniky. Když byl takto existenčně zakotven, pozval si do Ameriky svou dětskou lásku Elisabeth F. Stolkerovou, s níž se roku 1926 oženil. „Jaapie & Beppie“ se po celý život milovali a výborně doplňovali, on hrál na housle, ona byla výborná pianistka, a oba byli nadšení emigranti, kteří se rozhodli, že doma budou mluvit už výhradně jenom anglicky. Po roce se jim narodil syn Maarten, pozdější úspěšný architekt. Roku 1932 se mladý Jaapie stal profesorem na Harvardské universitě. Když začala druhá světová válka, bylo Den Hartogovi jasné, že dříve nebo později zastihne i americký kontinent. Proto roku 1939 vstoupil jako dobrovolník do zálohy amerického námořnictva (U. S. Naval Reserve). Roku 1941 byl povolán do aktivní služby a o rok později dal na Harvardské universitě výpověď. Když válka končila, dostal nabídku známého Massachusetts Institute of Technology (MIT), kterou přijal. Mluvil výborně také německy a francouzsky, a tak byl poslán do Evropy, aby na obsazených územích navazoval kontakty s významnými vědci a techniky, kteří až dosud pracovali pro nepřítele, získával od nich informace o důležitých projektech a zařízeních a zprostředkovával případnou spolupráci s nimi. MIT už zůstal věrný. Od konce šedesátých let trpěl těžkou artritidou, od roku 1982 byl zcela nepohyblivý, a roku 1989 zemřel.

Rozbalování svitku střešní krytiny

Představme si, že na šikmé střeše nějaké chaty rozbalujeme svitek střešní krytiny. Svitek přidržíme na hřbetě střechy a pustíme, aby se mohl vlastní tíhou rozbalit. Protože jde o pohyb pod vlivem síly tíže, můžeme si pro jednoduchost představit, že by rovina střechy byla svislá. Pak půjde o volný pád rozbalujícího se svitku, při kterém se potenciální polohová energie svitku mění postupně na kinetickou. To na obecnosti řešení nic nemění, neboť pohyb svitku bude probíhat na nakloněné rovině stejně jako na svislé, až na změnu časového měřítka v poměru $\sin\alpha:1$, kde α je úhel, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou. Krytina je pás dlouhý l m, hustě vinutý. Bude-li pás krytiny tenký, bude mít svitek velmi přibližně tvar válce. Jeho poloměr bude malý vzhledem k délce pásu a vodorovný posuv osy svitku bude pomalý, takže k tomuto pohybu nebudeme přihlížet. Zanedbáme-li ohybovou tuhost pásu, roztažitelnost a jeho možné rozkmitání, změní se původní polohová energie svitku $mg l$ na polohovou energii rozvinutého pásu $mg l/2$, neboť jeho těžiště se po úplném rozvinutí nachází o $l/2$ níže než těžiště svitku na počátku. Kinetická energie je po úplném rozbalení nulová. Kam se tedy druhá polovina potenciální energie poděla? Pokusíme se tuto záhadu objasnit. Ukáže se, že tato zdánlivě jednoduchá úloha je velmi složitá.



Obr. 21.1

Energetická bilance

Jak již bylo řečeno, případ budeme řešit jako úlohu o volném rozvíjení svitku na svislé rovině pod vlivem tíže. Pás je nahoře upevněn, jak naznačuje obr. 21.1, a svitek v obecném okamžiku poklesl o délku x . Jádru, na které je svitek navinut, zanedbáme. Budeme tedy předpokládat, že pás vyplňuje celý průřez svitku. Počáteční hmotnost svitku m_0 se při rozvíjení změní na aktuální hodnotu m , a také počáteční poloměr svitku r_0 se zmenší na r . Tloušťka krytiny je h (zahrnuje i případné drobné nerovnosti povrchu, takže si můžeme představit, že vrstvy krytiny na sebe doléhají bez mezer). Poměr délky odvalené části k celé délce označíme pro stručnost $\xi = x/l$. Z požadavku zachování hmotnosti dostaneme, že

$$m = m_0(1 - \xi), \quad r^2 = r_0^2(1 - \xi). \quad (21.1)$$

Protože svitek je válcové těleso, dostaneme jeho moment setrvačnosti k centrální ose

$$J_0 = \frac{1}{2} m_0 r_0^2, \quad J = \frac{1}{2} m r^2 = J_0(1 - \xi)^2. \quad (21.2)$$

Potenciální polohovou energii budeme měřit vzhledem k hladině $x = l$, takže její počáteční velikost bude

$$V(x = 0) = m_0 g l. \quad (21.3)$$

Po částečném rozvinutí svitku se tato energie bude skládat ze dvou částí, z polohové energie rozvinutého pásu a téže energie pohybujícího se svitku:

$$V(x) = m_0 g l \left[\xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) + (1 - \xi)^2 \right]. \quad (21.4)$$

Rozdíl obou energií

$$V(0) - V(x) = \frac{1}{2} m_0 g l \xi (2 - \xi) \quad (21.5)$$

se musí rovnat – pokud je daná mechanická soustava konzervativní – kinetické energii $T(x)$ odvinujícího se svitku. Ta se skládá z energie posuvného a rotačního pohybu:

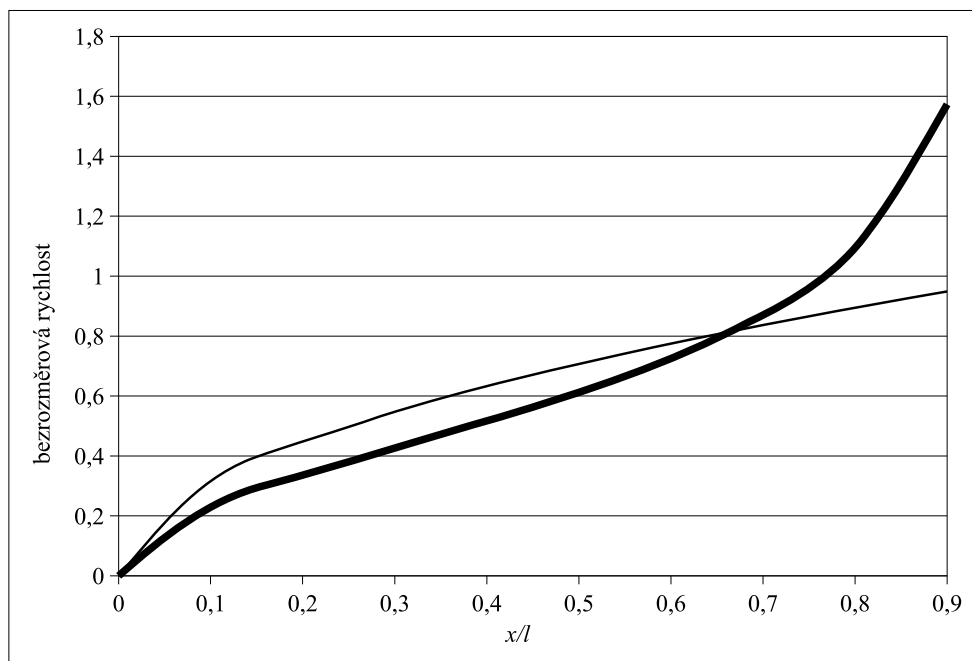
$$T(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 = \frac{3}{4} m_0 (1 - \xi) \dot{x}^2. \quad (21.6)$$

Z energetické bilance

$$V(0) - V(x) = T(x) \quad (21.7)$$

dostaneme vertikální rychlost pohybu osy svitku – k malé odchylce její trajektorie od svislice nepřihlížíme – v bezrozměrovém poměru

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{2gl}} = \sqrt{\frac{\xi(2-\xi)}{3(1-\xi)}}. \quad (21.8)$$

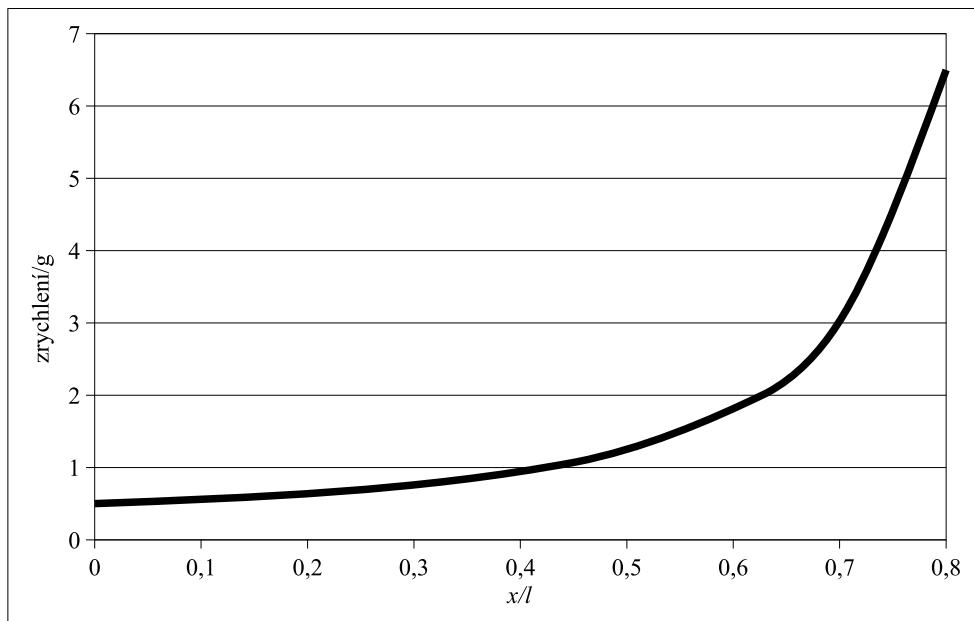


Obr. 21.2

Rychlost osy svitku tedy vztahujeme k rychlosti, kterou by dosáhlo těleso vypuštěné z klidu volným pádem po dráze l . Průběh této rychlosti je znázorněn na obr. 21.2. Průběh volného pádu je znázorněn tenkou čarou. Rychlost osy svitku je na počátku $\xi = 0$ nulová, ke konci však limituje pro $\xi \rightarrow 1$ k nekonečnu. Tato zvláštnost je důsledkem přijatých zjednodušujících předpokladů. Kdybychom nezanedbávali jádro, na kterém je cívka

navinuta, a brali je jako hmotu připevněnou na konec pásu, dostali bychom omezenou rychlost. Je to obdobný problém, s jakým se čtenáři mohli setkat již při rozboru pohybu biče, kde uvedená singularita vysvětluje jev známý jako práskání biče (kap. 16). Vztah (21.8) budeme derivovat podle času a využijeme přitom vztahů $d(\dot{x}^2)/dt = 2\dot{x}\ddot{x}$, $d\xi/dt = \dot{x}/l$. Dostaneme zrychlení \ddot{x} (opět v bezrozměrovém poměru)

$$\frac{\ddot{x}}{g} = \frac{1}{3} \frac{2 - 2\xi + \xi^2}{(1 - \xi)^2}. \quad (21.9)$$



Obr. 21.3

Jeho průběh je znázorněn na obr. 21.3. Na začátku pohybu je zrychlení $2g/3$, ke konci limituje k nekonečnu. Pokud bychom chtěli znát závislost dráhy na čase $x = x(t)$, musili bychom rovnicí (21.8) integrovat. My se však místo toho pokusíme odvodit diferenciální rovnici, která celý děj popisuje. Jde o soustavu o jednom stupni volnosti, takže pohyb bude popsán jedinou diferenciální rovnicí. Zobecněná souřadnice bude x , zobecněná síla mg .*

* Veličina x není tedy kartézská souřadnice, ta by se měnila v intervalu $\langle 0, x \rangle$.

Tato síla vstoupí do výpočtu prostřednictvím potenciální polohové energie. Ze vztahů (4) a (6) dosadíme do Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (21.10)$$

První člen na pravé straně je nulový, protože potenciální energie V nezávisí na rychlosti \dot{x} . Po dosazení máme

$$\frac{3}{2} m_0 (1 - \xi) \ddot{x} - \frac{3}{2} m_0 \frac{\dot{x}^2}{l} + \frac{3}{4} m_0 \frac{\dot{x}^2}{l} = m_0 g (1 - \xi). \quad (21.11)$$

Po úpravě dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{x} - \frac{1}{2(l-x)} \dot{x}^2 = \frac{2}{3} g. \quad (21.12)$$

Je to nelineární diferenciální rovnice. Snadno se můžeme přesvědčit, že řešení (21.8) a (21.9) této rovnici vyhovují. Veličinu x k tomu nepotřebujeme znát, dosadíme totiž $x = \xi l$ a rovnice (21.12) bude splněna identicky.

Posoudíme ještě energetickou bilanci při infinitesimálním pohybu $x \rightarrow x + dx$. Diferencujeme bilanční rovnici $V(0) - V(x) = T(x)$ a dojdeme k závěru, že při poklesu cívky o dx se potenciální energie samotného svitku zmenší o $2mgdx$, kdežto potenciální energie odvinutého pásu se zvětší o $mgdx$. Celkem se tedy uvolní potenciální polohová energie $mgdx$. Ta se změní v přírůstek kinetické energie svitku dT . Z rovnice (21.6) dostaneme

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} d\dot{x} = -\frac{3}{4} m_0 \frac{\dot{x}^2}{l} dx + \frac{3}{2} m \dot{x} d\dot{x} = dT_1 + dT_2. \quad (21.13)$$

Tento výraz se musí rovnat $mgdx$. Protože $\dot{x}d\dot{x} = (d\dot{x}/dt)\dot{x}dt = \ddot{x}dx$, bude

$$-\frac{3}{4} m_0 \frac{\dot{x}^2}{l} + \frac{3}{2} m \ddot{x} = mg. \quad (21.14)$$

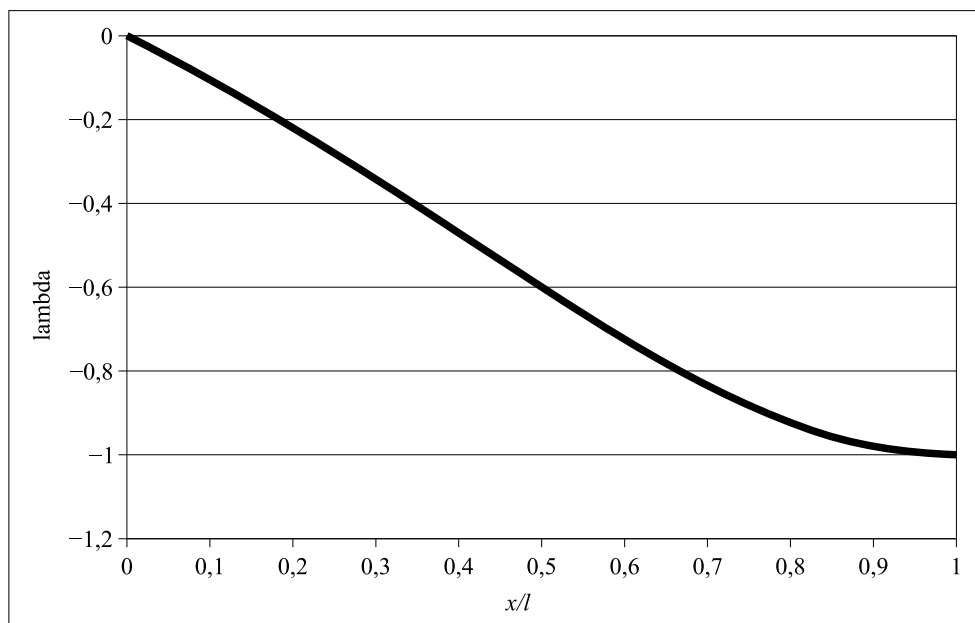
Dosazením z rovnic (21.1), (21.8) a (21.9) se přesvědčíme, že (21.14) vskutku platí. Po úpravě zjistíme, že (21.14) je totožná s rovnicí (21.12), což jsme mohli očekávat.

První člen na pravé straně rovnice (21.13) představuje změnu dT_1 kinetické energie, vyvolanou zmenšením hmotnosti svitku o $m_0 dx/l$, druhý

člen dT_2 odpovídá přírůstku $d\dot{x}$ rychlosti \dot{x} . Jestliže do těchto výrazů dosadíme už odvozené hodnoty, dostaneme

$$dT_1 = -m_0 g \frac{2\xi - \xi^2}{2(1-\xi)} dx, \quad dT_2 = m_0 g \frac{2 - 2\xi + \xi^2}{2(1-\xi)} dx. \quad (21.15)$$

Poměr $\lambda = dT_1/dT_2$ zůstává konečný i v limitě $\xi \rightarrow 1$ a je znázorněn na obr. 21.4. Na počátku pohybu je přírůstek kinetické energie dán výlučně přírůstkem rychlosti. Ke konci jsou obě části v limitě stejné, avšak opačných znamének. Jejich součet je tedy v limitě nulový, ale to je správné, protože i hmotnost svitku m se blíží k nule.



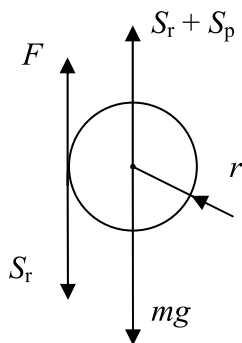
Obr. 21.4

Dostali jsme tedy konzistentní řešení, které popisuje pohyb cívky. Chceme-li získat informaci o průběhu síly F přenášené do závěsu odvinutým pásem krytiny, musíme částečně odvinutý svitek myšleným řezem uvolnit a napsat pro něj pohybové rovnice. A tady se ukáže úskalí našeho řešení. Pro větší názornost budeme postupovat d'Alembertovou metodou, tj. připojíme setrvačnou sílu a setrvačný moment a napíšeme pro vzniklou

soustavu podmínky rovnováhy. To někteří čtenáři budou považovat za ryzí formalismus. D'Alembertův princip se bohužel v mnoha učebnicích a na mnohých školách vykládá jako pouhé formální převedení jednoho členu rovnice na její druhou stranu. O dalekosáhlém významu tohoto principu jsme se již zmínili v kap. 3. Setrvačný moment znázorníme ekvivalentní dvojicí sil S_r na rameni r (obr. 21.5). Při virtuálním posuvu osy svitku o δx vykoná setrvačný moment práci $S_r r (\delta x / r) = S_r \delta x$, takže síla S_r je zobecněnou silou rotační setrvačnosti. K ní je třeba připočítat sílu S_p příslušnou posuvnému pohybu. Celková zobecněná setrvačná síla je jejich součtem. Z odvinutého pásu se na svitek přenáší síla $F = R - m_0 g \xi$. Z momentových výminek pro uvolněný svitek dostáváme

$$S_p + S_r = mg = m_0 g (1 - \xi), \quad (21.16)$$

$$F = S_r. \quad (21.17)$$



Obr. 21.5

Porovnáme-li rovnici (21.16) s rovnicí (21.11), zjišťujeme, že levá strana Lagrangeovy rovnice představuje zobecněnou setrvačnou sílu, tedy součet obou dílčích zobecněných setrvačných sil. Pravá strana je zobecněnou akční silou. Zobecněné setrvačné síly generuje kinetická energie. Protože kinetické energie posuvného pohybu a rotačního pohybu

$$T_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T_r = \frac{1}{4} m r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{1}{4} m \dot{x}^2. \quad (21.18)$$

jsou k sobě ve stálém poměru, budou k sobě v témže poměru $S_p : S_r = 2 : 1$.
i zobecněné setrvačné síly. Přitom podle (21.10) a (21.18)

$$S_p = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_p}{\partial x}, \quad S_r = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T_r}{\partial x}. \quad (21.19)$$

To znamená, že například setrvačná síla S_p není pouhým součinem hmotnosti a zrychlení $m\ddot{x}$, ani časovou změnou hybnosti $(d/dt)(m\dot{x})$. Tento druhý výraz odpovídá Newtonovu zákonu pro případ proměnlivé hmotnosti; platil by, kdyby T_p nezáviselo na x . To je pozoruhodné zjištění. S tím se budeme muset ještě vyrovnat a nalézt příčinu rozporu.

Z rovnice (21.16) dostaneme $2S_r + S_r = 3S_r = m_0g(1-\xi)$, takže se do svitku podle (21.17) přenáší síla $F = \frac{1}{3}m_0g(1-\xi)$. Pro reakci v závěsu pak máme

$$R = F + m_0g\xi = m_0g(1+2\xi)/3. \quad (21.20)$$

Reakce se tedy mění v závislosti na x lineárně od hodnoty $R(0) = m_0g/3$ do hodnoty $R(l) = m_0g$.

Když do rovnic (21.19) dosadíme výrazy (21.18), vyjde nám

$$S_p = m\dot{x} + m\ddot{x} + \frac{1}{2}m \frac{\dot{x}^2}{l-x}, \quad (21.21)$$

$$S_r = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}m\ddot{x} + \frac{1}{4}m \frac{\dot{x}^2}{l-x}. \quad (21.22)$$

Dosazením (21.21) a (21.22) do (21.16) dostaneme (21.12).

Odpověď na položenou otázku podává rovnice (21.7). Je to energetická bilance, která byla základem našeho řešení a je splněna po celou dobu trvání děje. Dokonce i v závěru děje (na konci rozbalování) dostaneme kinetickou energii v limitě rovnou polovině původní potenciální energie svitku (jde o limitu součinu hmotnosti a kvadrátu rychlosti, kdy jeden činitel limituje k nule a druhý k nekonečnu). Otázkou zůstává, co se děje po skončení popisovaného děje. Kdyby to vazební podmínka umožňovala, došlo by patrně k jo-jo efektu, tj. celý proces by se opakoval v opačném smyslu (svítek by se opět navinování vytvářel a stoupal na druhé straně – pokud by ne-

bylo ztrát – do původní výše). Kinetická energie by se měnila zpět v potenciální. Skutečný proces by však byl podstatně ovlivněn vlastnostmi materiálu, které se liší od ideálních předpokladů, a skutečnými okrajovými podmínkami.

Námítka proti podanému řešení problému

Uvedené řešení je založeno na energetické bilanci, tedy na zákonu zachování energie. Je však evidentně v rozporu s větou o impulsu a hybnosti, která musí rovněž platit. Zkusme postup řešení obrátit a alternativní řešení založit na této větě. Pak ovšem nebude splněn zákon zachování energie. Nově odvozené setrvačné síly odlišíme od předchozího řešení hvězdičkou.

Podle věty o impulsu a hybnosti musí být

$$S_p^* = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\dot{x} + m\ddot{x}, \quad (21.23)$$

$$S_r^* = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{\dot{x}}{r} \right) \right] = \frac{1}{2} m\dot{x} + \frac{1}{2} m\ddot{x} - \frac{1}{4} m \frac{\dot{x}^2}{l-x}. \quad (21.24)$$

Když součet těchto sil dosadíme do rovnice (21.16), dostaneme po úpravě rovnici (21.12), avšak s koeficientem u druhého členu $-7/6$ místo $-1/2$:

$$\ddot{x} - \frac{7}{6(l-x)} \dot{x}^2 = \frac{2}{3} g. \quad (21.25)$$

To znamená, že zrychlení \ddot{x} vyjde nyní větší než podle rovnice (21.12) a že energetická bilance nebude splněna. Které řešení je tedy správné? A kde hledat příčinu uvedené neshody?

Intermezzo

Zvolme jiný, jednodušší případ, kdy dochází k rozpornému řešení. Je to úloha o řetězu, který modelujeme jako hmotné, dokonale ohebné a neroztahitelné vlákno. Řetěz je uložen „bez ladu a skladu“ v krabici, odkud je vytahován. Abychom se vyhnuli započítávání změn potenciální polohové

energie, budeme předpokládat, že řetěz z krabice vytahujeme vodorovně a na dokonale hladké podložce. Když vytáhneme část řetězu o délce x , bude její hmotnost $m = \mu x$, kde μ je hmotnost jednotkové délky řetězu. Řetěz budeme vytahovat konstantní silou F , takže vykonáme práci Fx . Sledujme, co se stane, když se délka zvětší o infinitesimální přírůstek dx . Práce Fdx se spotřebuje nejen na přirychlení už vytažené části řetězu, ale také na urychlení elementu řetězu, který byl až dosud v klidu a náhle se musí pohybovat rychlostí $\dot{x} > 0$. To znamená náhlou změnu pohybového stavu, nespojitou změnu rychlosti, a tedy ráz. Jak je znázorněno na obr. 21.6, element o hmotnosti $dm = \mu dx$ uvolněný myšleným řezem měl hybnost nulovou a vzápětí bude mít hybnost $\dot{x}dm$. To znamená, že na něj musí působit síla Q , jejíž impuls se bude rovnat výsledné hybnosti:

$$Qdt = \dot{x}dm, \quad \text{a tedy} \quad Q = \dot{x}\dot{m}. \quad (\text{a})$$

Hmotnost oddělené části tyče se nezměnila, takže pro ni bude platit pohybová rovnice

$$F - Q = F - \dot{x}\dot{m} = m\ddot{x}. \quad (\text{b})$$

Síla F tedy bude

$$F = m\ddot{x} + \dot{x}\dot{m} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}). \quad (\text{c})$$

Tuto rovnici vynásobíme $dx = \dot{x}dt$, abychom dostali energetickou bilanci. Dostaneme

$$Fdx = m\ddot{x}dx + \dot{x}^2 dm = m\dot{x}d\dot{x} + \dot{x}^2 dm. \quad (\text{d})$$

Totální diferenciál kinetické energie $T = m\dot{x}^2 / 2$ je

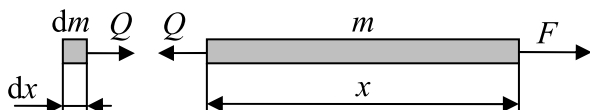
$$dT = m\dot{x}d\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 dm. \quad (\text{e})$$

Ze srovnání obou posledních rovnic vidíme, že

$$Fdx = dT + \frac{1}{2}\dot{x}^2 dm. \quad (\text{f})$$

To znamená, že kromě kinetické energie vytažené části řetězu musíme dodat ještě kinetickou energii, kterou uvádíme elementární částice řetězu

postupně z klidu do pohybu, a to rázem. Teprve při započítání této energie platí zákon zachování energie a zároveň i věta o impulsu a hybnosti.



Obr. 21.6

Sledujme nyní, co se stane, přestane-li síla F působit v okamžiku vytažení celého řetězu z krabice. Nadále se řetěz bude pohybovat s energií T , ačkoli jsme podle (f) dodali zvnějšku práci $Fl = T + (1/2) \int \dot{x}^2 dm$, tedy větší.

To znamená, že *soustava není konzervativní*, část dodané energie se ze systému ztratila. Neztratila se ovšem ze světa. Kdybychom předpokládali poddajný řetěz, změnila by se patrně v energii vlnění vzbuzeného dříve popsány rázy při uvádění až dosud klidných hmotných elementů v krabici do pohybu. Přitom by mohly případně vznikat i plastické deformace a část energie by se rozptýlila do okolí v podobě tepla. Jestliže jsme přijali předpoklad neroztažitelného řetězu, vlastně absolutně neroztažitelného vlákna, pak se lze domýšlet, že se energie daná posledním členem v rovnici (f) rozptýlila jen v podobě tepla, neboť přetvoření (poměrnou deformaci) vlákna jsme ze svých úvah vyloučili.

Odstranění rozporu a nové pochyby

Vrátíme se k původní úloze. Abychom našli příčinu rozporu mezi oběma řešeními, porovnáme setrvačné síly v obou případech. Z rovnic (21) až (24) zjistíme, že

$$S_p = S_p^* + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \dot{x}^2, \quad S_r = S_r^* + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l} \dot{x}^2. \quad (21.26)$$

To znamená, že v rovnici (21.16), plynoucí z energetické bilance, budeme mít

$$S_p^* + S_r^* + \frac{m_0}{l} \dot{x}^2 = mg. \quad (21.27)$$

Třetí člen na levé straně (21.27) musíme k součtu obou zobecněných setrvačných sil doplnit, aby energetická bilance (21.16) platila i pro tyto rigorózně odvozené setrvačné síly (21.23) a (21.24). Prozkoumejme význam tohoto členu. Když rovnici (21.27) znásobíme dx , dostaneme energetickou bilanci v diferenciální formě. Třetí člen se dá upravit pomocí (21.1):

$$\frac{m_0}{l} \dot{x}^2 dx = m_0 d\xi \dot{x}^2 = -\dot{x}^2 dm. \quad (21.28)$$

Záporné znaménko na pravé straně znamená, že se hmotnost svitku při pohybu zmenšuje.

Vysvětlení je nyní snadné. Protože náš model předpokládá válcový tvar svitku a v intervalu dt se z něho uvolní hmotnost $|dm| = -dm$, neuvolní se jako element pásu délky dx o hmotnosti $|dm|$, ale jako *rotačně symetrická obruč* téže hmotnosti. Ta má obvodovou rychlost \dot{x} a rotační kinetickou energii $\dot{x}^2|dm|/2$. Stejnou rychlost i energii má posuvný pohyb, takže celková kinetická energie obruče je právě $\dot{x}^2|dm|$. O tuto energii se zmenší kinetická energie svitku $dT = (S_p + S_r)dx$, takže rigorózní energetická bilance bude

$$dT^* = (S_p^* + S_r^*)dx = \left(mg - \frac{m_0}{l} \dot{x}^2 \right) dx. \quad (21.29)$$

To znamená, že se uvolněná potenciální energie $mgdx$ nepřemění celá na energii T^* , ale jen její část, zbytek se z mechanického systému „ztratí“ obdobně jako tomu bylo u řetězu, tj. přemění se v teplo a rozptýlí se do okolí. Je to energie související s náhlým zastavením uvolněné rotující obruče o hmotnosti dm . To ovšem znamená, že *soustava není konzervativní*.

Avšak ve skutečnosti se hmotný element tímto způsobem neuvolňuje. Když se element pásu o délce dx pokládá na střechu, je jeho okamžitá rychlost vzhledem ke střeše nulová, k žádné nespojitosti této rychlosti nedochází a žádná kinetická energie se ze svitku neodnáší. Abychom byli poctiví, musíme přiznat, že element, který se právě pokládá, má ještě rotační energii $\frac{1}{2}\omega^2(\frac{1}{12}dmdx^2)$, ale ta je řádově menší než třeba element polohové energie

$mgdx$. Je tedy zanedbatelná. To znamená, že matematický model by měl být konzervativní. Je tedy otázka, zda řešení založené na zachování energie v původní verzi, tj. rovnice (21.21), (21.22) a (21.12), ačkoli jsou principiálně pro zvolený nekonzervativní matematický model nesprávné, nepopisují realitu lépe než rigorózní řešení (21.23), (21.24) a (21.25). Toto *rigorózní* řešení platí totiž pro náš *nerigorózní* model. Kdybychom to chtěli přesněji analyzovat, musili bychom opustit představu, že svitek má válcový tvar. Musili bychom předpokládat, že má obrys daný obloukem Archimédovy spirály, v němž se všechny hmotné elementy pohybují kolem osy svitku po kružnicích (ve stálé vzdálenosti od osy) až do okamžiku, kdy opouštějí svitek. Jejich rychlost se mění spojitě a k žádnému rázu nedochází. Úlohu by bylo možné dále zpřesnit zahrnutím také vodorovných složek rychlostí do výpočtu. To by však byla už značně komplikovaná úloha. Mohli bychom ji řešit také experimentálně. Experiment by nám však nedal spolehlivou odpověď, protože by se při něm rušivě projevovaly skutečné vlastnosti použitého materiálu, jež jsme si v našich teoretických úvahách zidealizovali. Ostatně obě řešení ztrácejí význam, když se x blíží l , tedy koncem rozbaldování svitku. Tehdy se už naše předpoklady příliš odchylují od skutečnosti.

Příběhy dvou malých vodních elektráren

V tomto textu se zaměříme na dvě události. Obě se týkají malých vodních elektráren. Jedna z nich byla postavena u Spálova na soutoku Jizery a Kamenice někdy za první Československé republiky a hned při slavnostním zahájení provozu se porouchala. Roztrhlo se přívodní potrubí, a to z příčin, které se mohou zdát neuvěřitelné. Příběh zná autor z vyprávění svého nezapomenutelného učitele prof. Dr. techn. Ing. Jaroslava Hýbla, u něhož v poválečných letech pracoval jako asistent. U příležitosti výročí jeho úmrtí mu věnoval vzpomínku v Bulletinu Asociace strojních inženýrů (2000).

V druhém případě byly vlastně vodní turbíny tři. Byly to shodné kolenové turbíny s horizontálními hřídeli, které nahradily asi před sedmnácti lety původní, a již značně zastaralé turbíny na řece Vltavě na pražské Štvanici. U dvou z nich se pravidelně opakovaly lomy jednoho ze šroubů v přírubě spojující ložiskový čep s tělesem turbíny. Třetí turbína pracovala bez závad. Bylo třeba vyšetřit příčinu těchto záhadných lomů, které nebylo možné vysvětlit nedostatečnou pevností nebo výrobní chybou šroubů.

Porucha vodní elektrárny ve Spálově, kterou způsobil fotograf

Po dokončení stavby nové elektrárny na soutoku Jizery a Kamenice se jako vždy konaly garanční zkoušky, kterými se prokázalo, že turbína dává požadovaný výkon při garantované účinnosti. Poté se celé dílo slavnostně odevzdávalo provozovateli. Toho se účastnili nejen představitelé investora a stavebních a výrobních firem, ale také představitelé místní veřejné správy, pozvaní novináři a jiní vážení hosté. Ze slavnosti se pořizoval písemný záznam spolu s obrazovým materiálem, který měl za úkol dodat fotograf pozvaný z Turnova. Elektrárna byla uvedena do provozu a fotograf konal svou práci. Procházel se mezi lidmi, volně se pohyboval strojovnou a fotografoval kromě osob také všechny přístupné stroje onoho obdivuhodného

zařízení, jež poslušně měnilo dosud nespoutaný tok Jizery v elektrickou energii. Po točitých schodech sestoupil i do šachty, kterou procházela sací trouba odvádějící vodu z oběžného kola turbíny zpět do řeky. V šachtě byla tma, a tak fotograf musel použít bleskového osvětlení, neboť citlivost fotografického materiálu by jinak nestačila k uspokojivé expozici obrazu. Tehdy se používaly malé pytlíky naplněné magnezium, opatřené knotem. Fotograf zavěsil jeden takový pytlík na kovové zábradlí a zapálil knot. Poté zaměřil svůj aparát, otevřel objektiv a čekal, až blesk osvětlí šachtu. Nahoře ve strojovně nikdo jeho práci ani neřídil, ani nesledoval. Obsluha soustrojí si všímala jen svých objektů a sledovala bezchybný chod.

Vtom elektrikář zahlédl záblesk bleděmodrého světla odkudsi za generátorem. Lekl se, že v rozvodně vznikl elektrický zkrat, který by mohl způsobit nebezpečný požár. O fotografovi nevěděl, a jiný původ modravého záblesku si neuměl představit. Ihned proto odpojil generátor od sítě. Tím však odlehčil turbínu, jejíž otáčky začaly stoupat. To ale nebyla jeho starost, on odpojil od elektrických zdrojů podezřelé místo, a tím jeho zásah končil. Myslel, že případný požár se v klidu uhasí a vše ostatní se vyšetří později.

Strojník dohlížející na chod vodní turbíny netušil, proč elektrikář náhle stroj odlehčil, a byl vyděšen, když slyšel hvízdání turbíny roztácející se do vysokých otáček. V tom okamžiku nemyslel na to, že otáčky nemohou stoupnout víc než na necelý dvojnásobek jmenovité hodnoty, což jsou tzv. průběžné otáčky, které každý správně navržený stroj musí bez poruchy vydržet. Báł se, že se nový stroj může poškodit, a proto rychle zavřel přívod vody. Příliš rychle! V přívodním potrubí vznikl vodní ráz, způsobený náhlým zastavením proudící vody těsně před turbínou. Vzniklý přetlak roztrhl přívodní potrubí a snad asi šest kubických metrů vody vytékalo každou vteřinu do strojovny. Hladina vody v prostoru malé strojovny rychle stoupala.

Poděšený elektrikář v panice vyskočil téměř až ke stropu k zamřížovaným oknům strojovny, což byl mimořádný atletický výkon, kterého by asi za normálních okolností nebyl vůbec schopen. Ostatní osoby ve strojovně plavaly tak dlouho, až voda vyrazila široká vrata a všechny vyplavila ven

na trávník. Tak nedůstojně skončili tehdy všichni, kteří naplánovali, uskutečnili a právě oslavovali spoutání vodního živlu do služeb člověka.

Byla jmenována komise expertů, která měla určit podíl viny na vzniklé katastrofě. Fotografa nebylo možné obvinít, protože nemohl tušit, jak si jeho blesk obsluha generátoru vysvětlí. Nicméně ji mohl upozornit na to, co hodlá podniknout. Největší vinu na nehodě měl strojník. Měl vědět, že stroji ani při průběžných otáčkách žádné nebezpečí nehrozí. Vinu však měl i projektant, který mohl konstruovat uzávěr potrubí tak, aby jeho příliš rychlé uzavření bylo vyloučeno. Čtenáře jistě napadne, že po bitvě je každý generál moudrý. Štěstí bylo, že zůstalo jen při věcných škodách, nikdo nepřišel o život, ani nebyl raněn.

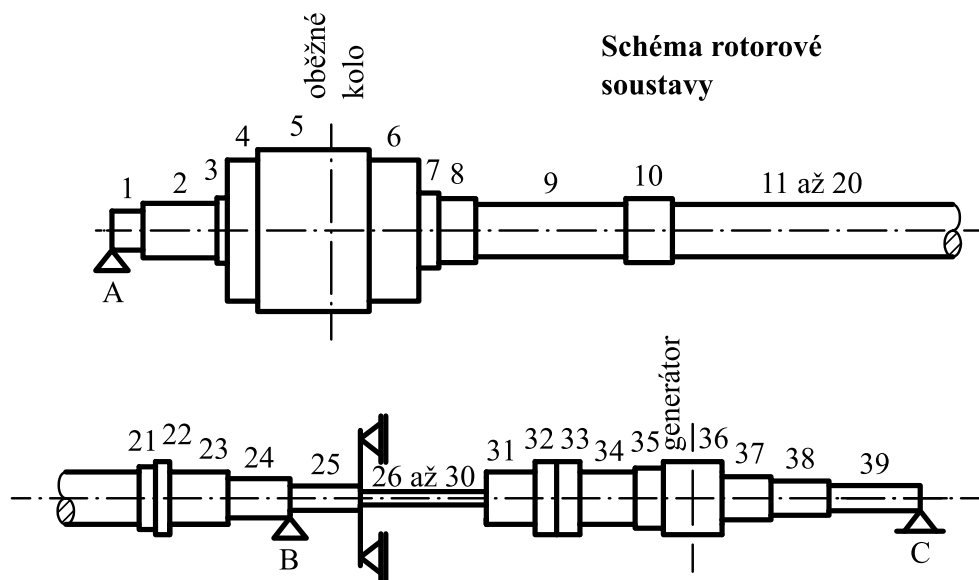
Poruchy šroubů v přírubovém spoji ložiskového čepu s tělesem kolenové vodní turbíny

V hydrocentrále v Praze na Štvanici byly roku 1990 instalovány tři nové shodné kolenové turbíny firmy ČKD Blansko s horizontálními hřídeli. Každá turbína pohání svůj elektrický generátor umístěný na téže hřídeli. Jedna z těchto turbín běžela bez poruch, kdežto u druhých dvou praskaly šrouby v přírubě spojující ložiskový čep s tělesem turbíny. Šrouby M30×90 praskaly únavou materiálu asi po 14 dnech provozu, což odpovídá přibližně $2 \cdot 10^6$ otáčkám. Byly vyměněny za jiné, různě upravené a s kvalitnějším materiálem, ale praskaly vždy znovu. Naposledy byla ocel 17022.6 nahrazena ocelí 17021.6 (podle ČSN) a šroub M30×90 prodloužen na M30×115, k jehož vystředění byla použita kulová podložka. I tyto šrouby však praskaly.

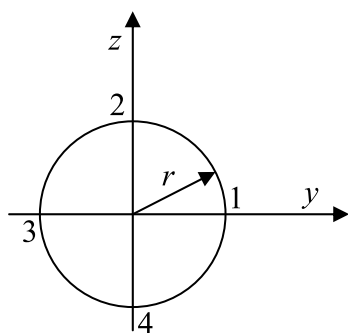
Výrobce i provozovatel se při řešení tohoto problému dopustili několika chyb. Poruchy nebyly řádně evidovány, neexistovaly protokoly s popisem poruch. Prasklé šrouby byly sešrotovány, takže v době, kdy byl autor přizván k nalezení příčin poruch, nebyly k dispozici ani ony, ani jejich fotografie. Výjimkou byl jeden šroub, který se podařilo ve sběru šrotu najít. Byl porušen únavovým lomem zasahujícím velkou část průřezu, lomová plocha byla již zkorodována. Lom se počal šířit z jediného zárodku mezi

druhým a třetím závitem zavrtnaného konce šroubu, kde lze očekávat největší koncentraci napětí. Tvrzení jednoho z pracovníků montáže, že se opakovaně porušují pouze šrouby z jednoho a téhož místa příruby, nebylo možno ověřit. Tato informace by přispěla k rozlišení příčiny poruch spjatých s přírubou (výrobní vada) od možné vnější příčiny (přetížení spoje).

Schéma rotorové soustavy je zřejmé z obr. 22.1. Vzdálenost radiálních ložisek AB je 10375 mm, ložisek BC 4534 mm. Vzdálenost mezi vnějšími podpěrami je tedy 14909 mm. Hřídel je značně dlouhý, neboť generátor je uložen až za kolenem sacího potrubí. Čísla na obr. 22.1 označují jednotlivé konečné (nosníkové) prvky použité pro výpočet namáhání hřídele. Radiální ložiska jsou při montáži nastavena tak, aby při zatížení silou tíže nepřenášela spojka mezi oběma částmi hřídele (prvky 32, 33) žádný ohybový moment. Přetlaková turbína zpracovává průtočné množství $55 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ při spádu 4,18 m s výkonem 1890 kW. Vnější průměr oběžného kola je 3500 mm. Příruba, jejíž poruchy vyšetřujeme, spojuje prvky 3 a 4.



Obr. 22.1



Obr. 22.2

Pevnostní kontrola soustavy neprokázala namáhání nad mezí únavy za běžných provozních podmínek. Proto bylo namáhání šroubů vyšetřeno tenzometricky. Původní měření uskutečnil výrobce. Pracovníci umístili snímače na dřík šroubu v osové směru v odstupu 90^0 v místech označených na obr. 22.2 číslicemi 1 až 4. Hodnoty poměrných prodloužení zaznamenané v daném okamžiku označíme $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Z nich autoři vypočítali tahovou

složku namáhání $\sigma_t = \frac{1}{4} E \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i$. Pro výpočet ohybové složky namáhání

dříku šroubu použili vzorec $\sigma_o = \max |E\varepsilon_i - \sigma_t|$. Tento vztah však může vést při určení ohybového namáhání k chybě až 30 %, a to i při přesném měření. Záleží totiž na tom, jak je čtveřice snímačů otočena vzhledem k rovině ohybového momentu. Podle Bernoulliho hypotézy se při tahu i ohybu zachovává rovinnost průřezů, takže musí platit podmínka

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4. \quad (22.1)$$

Splnění této podmínky experimentátoři nekontrolovali, podmínka nebyla splněna. Poměrně velký rozdíl svědčí o nějaké chybě měření, která nebyla vyšetřena. Proto závěr prvního tenzometrického měření neodhalil příčinu poruch šroubů. Měření se mělo vyhodnocovat jinak, což nyní ukážeme.

Předpoklad zachování rovinnosti průřezů vede k rovnici

$$\varepsilon_i = ay_i + bz_i + c, \quad (22.2)$$

kde a, b, c jsou konstanty a y_i, z_i souřadnice snímače v rovině průřezu, $i = 1, 2, \dots, 4$. Podle obr. 22.2 odtud dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 1 \\ 0 & r & 1 \\ -r & 0 & 1 \\ 0 & -r & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}, \text{ čili v maticovém zápisu } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{p}. \quad (22.3)$$

Jde o přeúřčenou soustavu rovnic pro neznámé konstanty. Protože veličiny ε_i nejsou přesné, nebude ani soustava (22.3) přesně splněna. Reziduální vektor $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{p} - \boldsymbol{\varepsilon}$ by měl být v ideálním případě nulový. Budeme jej minimalizovat tak, aby byla minimální jeho euklidovská norma $(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{1/2}$. Odtud dostaneme pro hledané konstanty vztah

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (22.4)$$

Euklidovská norma reziduálního vektoru je zároveň mírou nepřesnosti měření. Ohybová složka napětí je pak určena spádem roviny $\varepsilon = ay + bz + c = f(y, z)$:

$$\sigma_o = Er |\text{grad} \varepsilon| = Er \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} E \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2}. \quad (22.5)$$

Pro tahovou složku napětí dostaneme

$$\sigma_t = Ec = \frac{1}{4} E (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4). \quad (22.6)$$

Opakovaným měřením se prokázala velká ohybová složka vzniklá utažením šroubu, který nebyl zavrtán kolmo, ale s nepřipustnou úhlovou odchylkou. To pravděpodobně vedlo k lokálnímu přetížení a ke vzniku zárodku únavové trhliny.

Závěr

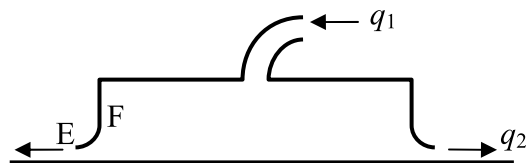
Z obou příběhů je zřejmé, že úloha vyšetřit příčinu poruchy stroje vyžaduje značné intelektuální úsilí. Nejlépe to vyjádřil už Sir Arthur Conan Doyle

v detektivce Pes baskervillský: Čím pošetilejší, čím grotesknější je nějaká příhoda, tím bedlivější pozornosti si zasluhuje, a právě ten bod, který věc zdánlivě zatemňuje, věc s největší pravděpodobností nejlépe vysvětlí – je-li arci přesně zvážen a vědecky analyzován.

Pohyb na vzduchovém polštáři

Při pohybu těžkých předmětů na rovinné podložce lze téměř úplně odstranit třecí odpor tím, že se pod předmětem vytvoří vzduchový polštář. Tohoto principu se využívá například u jednoho druhu rotační sekačky na trávu, u vznášedel na vodní hladině apod. V tomto příspěvku se pokusíme na jednom příkladu vysvětlit, jakým zákonům mechaniky tento pohyb podléhá. Jde-li o pohyb tělesa na tuhé podložce, vytváří se vzduchový polštář vhněním vzduchu do prostoru otevřené tlakové nádoby ve tvaru jakéhosi tuhého mělkého zvonu (hrnce) obráceného dnem vzhůru (nemusí být rotačně symetrický). Na jeho spodním okraji je připojen více nebo méně pružný lem, pod nímž vzduch vytéká do volného prostoru. Je zřejmé, že k udržení potřebného přetlaku je třeba neustále dodávat vzduch, takže pohyb se děje sice prakticky bez třecího odporu, ale to neznamená, že není třeba dodávat energii. Přesto může být využití tohoto principu výhodné, a to zvláště při rychlém pohybu nebo při přepravě těles na krátké vzdálenosti.

V tomto příspěvku uvedeme zákony mechaniky, kterými lze tento pohyb popsat. Podrobný rozbor umožňuje nejen posoudit potřebný přetlak a dodávaný výkon, ale také stanovit podmínky pro podkritické proudění vzduchu a pro stabilitu pohybu. Základní informace jsou v monografii ROSEAU (1984).



Obr. 23.1

Popis zařízení a jeho matematický model

Princip pohybu tělesa na vzduchovém polštáři vysvětlíme na zařízení znázorněném na obr. 23.1. Přepravované těleso, které není zakresleno, je připo-

jeno k tlakové nádobě. Tato nádoba (hrnec) má tvar válce dole otevřeného a zakončeného lemem FE. Do nádoby se vhání za sekundu vzduch o hmotnosti q_1 . Odtoková hmotnost za sekundu je označena q_2 . Tlak vzduchu v nádobě označíme p , hustotu ρ , hmotnost m a objem V . Bude tedy

$$m = \rho V. \quad (23.1)$$

Pro bilanci protékajícího množství platí evidentní vztah

$$q_1 = q_2 + \frac{dm}{dt}. \quad (23.2)$$

Vzduch se v nádobě udržuje ve stálém stavu (nezávislém na čase), avšak v okolí lemu FE ve tvaru anuloidu se počne pohybovat a vytékat rychlostí u prstencovitým průřezem (mezi okrajem E lemu a pokladem). To znamená, že počáteční tlak p podél zakřivené dráhy FE klesá až k hodnotě okolního tlaku p_0 . Protože $p > p_0$, prohýbá se lem směrem nahoru. Vzdálenost mezi jeho okrajem a podkladem označíme e . Vzdálenost horního okraje lemu F, kde je lem připojen k tlakové nádobě, od podkladu je h . Výška deformovaného lemu je $h - e$, nedeformovaného b . Pro jeho elastickou deformaci bude přibližně platit lineární vztah

$$b - (h - e) = k(p - p_0). \quad (23.3)$$

Zde k je konstanta charakterizující poddajnost lemu. Je-li lem tuhý, je $k = 0$. Přetlak vzduchu dodávaného kompresorem závisí na přítokovém množství q_1 , takže

$$p - p_0 = f(q_1). \quad (23.4)$$

Při malém přítoku je přetlak velký a naopak, takže charakteristika $f(q_1)$ kompresoru má negativní derivaci, $df(q_1)/dq_1 < 0$. Teplota vzduchu ve vzduchovém polštáři se dá vypočítat, jestliže známe pracovní bod charakteristiky (23.4) a hustotu vzduchu ρ , neboť velmi přibližně platí stavová rovnice $p v = r T$. Zde r je měrná plynová konstanta, $v = \rho^{-1}$ je měrný objem a T absolutní teplota. Z fyziky známe Mayerův vztah, podle kterého $r = c_p - c_v$, což je rozdíl měrných tepel při stálém tlaku a při stálém objemu, a také závislost tlaku na hustotě [viz GERMAIN (1973)]

$$p = \rho^\gamma A(s), \quad \gamma = c_p / c_v, \quad (23.5)$$

kde $A(s)$ je funkce měrné entropie a γ Poissonova konstanta. Při izoentropické změně je $A(s)$ konstantní a $p/\rho^\gamma = \rho v^\gamma = \text{konst.}$

Poznámka. Vztah (23.5) platí i při izotermické změně. Z učebnic termodynamiky známe vztah pro entropii pro $T = \text{konst.}$, totiž $s = c_v \ln(p/p_0) + c_p \ln(v/v_0) = c_v \ln(A/A_0)$. Odtud vypočteme $A = A_0 e^{s/c_v} = A(s)$. Vztah (23.5) můžeme upravit s použitím stavové rovnice na tvar $A = rT v^{\gamma-1} = rT \rho^{-(\gamma-1)}$, takže dostaneme $p v = rT = \text{konst.}$ To je známý zákon Boyleův-Mariotteův.

Pro proudění vzduchu pod lemem tlakové nádoby platí Bernoulliho rovnice v diferenciálním tvaru [viz PRAGER (1961)]

$$\tilde{u} d\tilde{u} = -dp / \rho, \quad (23.6)$$

v níž symbol \tilde{u} značí rychlost v daném místě, která se mění z hodnoty 0 na vtoku až na hodnotu u na výtoku, zatímco tlak se mění v těchto místech z hodnoty p na hodnotu p_0 . Kdyby se tlak měnil jen málo, bylo by možno považovat hustotu za konstantu a pak bychom integrací (23.6) dostali závislost

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho u^2. \quad (23.7)$$

Pro výtokové množství vzduchu pak platí, že

$$q_2 = \rho l e u, \quad (23.8)$$

kde l je délka obvodu výtokové hrany.

Stacionární pracovní režim s malým přetlakem

Je-li M celková hmotnost dopravovaná na vzduchovém polštáři, musí při ustáleném pohybu platit (za předpokladu malého přetlaku) tyto rovnice:

$$Mg = S(p - p_0), \quad p - p_0 = f(q_1), \quad q_1 = q_2 = \rho l e u, \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho u^2. \quad (23.9)$$

V prvním z těchto vztahů značí g tíhové zrychlení a S plošný obsah průmětu plochy vzduchového polštáře do vodorovné roviny. Je-li H tloušť-

ka vzduchového polštáře, pak jeho objem je $V = SH$. Protože předpokládáme jen malou změnu tlaku, bude hustota vzduchu přibližně stálá, a podle stavové rovnice bude stejně stálá i jeho teplota.

Příklad 1. Necht' $p_0 = 10^5$ Pa, $p - p_0 = 2500$ Pa, $S = 1,5$ m², $H = 0,1$ m, $V = SH = 0,15$ m³. Je-li přibližně $g = 10$ m.s⁻², vyjde $Mg = 1,5 \cdot 2500 = 3750$ N, a tedy $M = 375$ kg. Pro hustotu $\rho = 1,26$ kg.m⁻³ vypočteme z rovnice (23.7) výtokovou rychlost $u = 63$ m.s⁻¹. Je-li dále obvod lemu $l = 7$ m a výtoková mezera má výšku $e = 0,006$ m, vyjde průtokové množství vzduchu podle (23.8) $q_1 = q_2 = 1,26 \cdot 7 \cdot 0,006 \cdot 63 = 3,33$ kg.s⁻¹. Tento údaj spolu s přetlakem $p - p_0$ určují pracovní bod na charakteristice (23.4) kompresoru. Nepočítáme-li ztráty, je příkon na vstupu $P_1 = q_1(p - p_0) / \rho$ stejný jako výkon na výstupu $P_2 = q_2 u^2 / 2$. Vyjde $P_1 = P_2 = 6615$ W.

Izoentropická expanze

Není-li přetlak malý, nelze při integraci Bernoulliho rovnice (23.6) pominout proměnlivost hustoty. Budeme proto předpokládat, že expanze vzduchu pod lemem tlakové nádoby je izoentropická, tj. že platí rovnice (23.5) s hodnotou $A(s) = \text{konst}$. Odtud vypočteme

$$\frac{dp}{\rho} = \gamma \rho^{\gamma-2} A d\rho. \quad (23.10)$$

Je výhodné zavést do výpočtu rychlost zvuku c . Pro ni platí vztah

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{konst}} = \gamma \rho^{\gamma-1} A = \gamma \frac{p}{\rho}. \quad (23.11)$$

Diferenciací a úpravou s použitím (23.10) vyjde

$$dc^2 = (\gamma - 1) \cdot \gamma \rho^{\gamma-2} A d\rho = (\gamma - 1) \frac{dp}{\rho}. \quad (23.12)$$

Odtud vypočteme dp/ρ a dosadíme do (23.6). Po integraci vyjde

$$u^2 = \frac{2}{\gamma - 1} (c^2 - c_0^2), \quad (23.13)$$

kde c je rychlost zvuku na vstupu do výtokového kanálu, c_0 je rychlost zvuku pod výtokovou hranou E; tam je tlak p_0 a hustota ρ_0 . Poslední vztah můžeme upravit do tvaru

$$\rho \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p \left(1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right). \quad (23.14)$$

Je-li zlomek $\frac{p-p_0}{p_0} \ll 1$, přejde (23.14) po úpravě ve tvar (23.7).

Konečně je třeba poznamenat, že pro výtokové množství bude nyní platit vzorec

$$q_2 = \rho_0 l e u, \quad \rho_0 = \rho \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma}. \quad (23.15)$$

Poměr rychlostí u/c_0 je Machovo číslo na výstupu. Pro jeho kvadrát vychází ze vztahu (23.13) rovnice

$$\frac{u^2}{c_0^2} = \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma-1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right). \quad (23.16)$$

To znamená, že proudění je podzvukové pouze tehdy, je-li splněna nerovnost

$$\frac{p}{p_0} < \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (23.17)$$

Je-li $\gamma = 1,4$, bude $(p/p_0) < 1,89$. Tento tlakový poměr bychom neměli překročit.

Příklad 2. Pro hodnoty z příkladu 1 dostaneme $p/p_0 = 1,025$, $\rho_0 = 1,238 \text{ kg.m}^{-3}$, $c = 337,47 \text{ m.s}^{-1}$, $c_0 = 336,29 \text{ m.s}^{-1}$, $u = 63,27 \text{ m.s}^{-1}$. Tato hodnota se od dřívějšího výpočtu téměř neliší, protože přetlak je relativně velmi malý. Machovo číslo je $63,27/336,29 = 0,188$.

Dynamická stabilita

Dosavadní rozbor dané úlohy neumožňuje posoudit stabilitu pohybu. Tu můžeme postihnout jen tak, že ustálený proud vzduchu porušíme a budeme zkoumat, zda tyto malé poruchy vstupních proměnných (jejich nekonečně malé variace) se budou s časem zvětšovat. Označíme je operátorovým symbolem δ . Protože poruchy představují neustálený pohyb, bude pro ně platit pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon)

$$M \frac{d^2 \delta h}{dt^2} = S \delta p. \quad (23.18)$$

Budeme předpokládat, že pro perturbaci tlaku a hustoty platí zákon izoentropické změny $p / \rho^\gamma = \text{konst.}$, takže

$$\frac{\delta p}{p} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (23.19)$$

Dále budeme předpokládat, že platí (23.3), (23.4) a (23.7), takže

$$\delta h - \delta e = -k \delta p, \quad (23.20)$$

$$\delta p = f_q \delta q_1, \quad (23.21)$$

$$f \delta \rho + \rho \delta p = (\rho u) \delta(\rho u). \quad (23.22)$$

V těchto rovnicích jsme označili podle (23.4) $f = (p - p_0)$, $f_q = \partial f / \partial q_1$.

Z rovnice kontinuity (23.2) dostaneme

$$\delta q_1 = \delta q_2 + \frac{d}{dt} (V \delta \rho + \rho \delta V). \quad (23.23)$$

V této rovnici zanedbáme součiny časové derivace a perturbace jako malé veličiny vyššího řádu a dále dosadíme $\delta V = S \delta h$. Dostaneme

$$\delta q_1 = \delta q_2 + V \frac{d}{dt} \delta \rho + \rho S \frac{d}{dt} \delta h. \quad (23.24)$$

Perturbaci δq_2 vypočteme ze vztahu (23.8), dosadíme do (23.24) a pak do (23.21). Výsledek upravíme s použitím (23.18). Vyjde

$$\frac{\delta p}{f_q} = l [\rho u \delta e + e \delta(\rho u)] + \frac{V \rho M}{\gamma p S} \frac{d^3 \delta h}{dt^3} + \rho S \frac{d}{dt} \delta h. \quad (23.25)$$

Konečně z rovnic (23.18) až (23.20), (23.22) a (23.25) vyloučíme perturbace δp , $\delta \rho$, δe a $\delta(\rho u)$. Tak dostaneme diferenciální rovnici třetího řádu popisující svislý perturbovaný pohyb ve tvaru

$$\frac{d^3 \delta h}{dt^3} + \left(\frac{leu}{2V} + \frac{le\gamma p}{uV\rho} + k\gamma \frac{plu}{V} - \frac{\gamma p}{V\rho f_q} \right) \frac{d^2 \delta h}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2}{VM} \frac{d\delta h}{dt} + \frac{S\gamma plu}{VM} \delta h = 0. \quad (23.25)$$

Všechny koeficienty jsou pozitivní. Proto lze aplikovat Routhovo-Hurwitzovo kritérium stability, které říká, že pohyb je stabilní, pokud [viz KOŽEŠNÍK (1979)]

$$\frac{leu}{2V} + \frac{le\gamma p}{uV\rho} + k\gamma \frac{plu}{V} - \frac{\gamma p}{V\rho f_q} - \frac{lu}{S} > 0. \quad (23.26)$$

Do této nerovnosti můžeme dosadit $V = SH$ a veličinu S zkrátit. Odtud je zřejmé, že stabilitu může ohrozit příliš velká výška H tlakové nádoby. Příznivý vliv má naopak malá strmost $|f_q|$ charakteristiky kompresoru a velká poddajnost lemu na výtoku z nádoby. Na velikosti plochy S přitom nezáleží.

Závěr

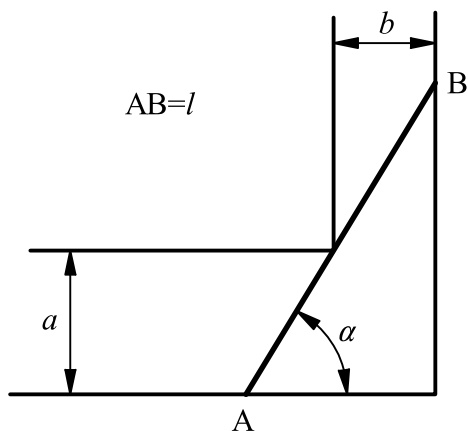
Z uvedeného řešení je zřejmé, že analytické metody neztrácejí význam ani v době superpočítačů, a také že analytické ani numerické metody se neobejdou bez dobré znalosti fyzikálních zákonů.

Historie variačního počtu

There is hardly any other branch of the mathematical sciences in which abstract mathematical speculation and concrete physical evidence go so beautifully together and complement each other so perfectly.

(Cornelius Lanczos)

Objev infinitesimálního počtu v sedmnáctém století otevřel badatelům nové obzory exaktních přírodních věd a umožnil matematické řešení mnoha problémů, jež byly jinými prostředky často neřešitelné. Zvláštní kapitolou byly *extremální problémy*, tj. *vyhledávání maxim a minim* různých funkcí. Bylo možné je aplikovat v mnoha úlohách velké praktické důležitosti. Například bylo možno vypočítat poměr poloměru a výšky válcové plechovky na konzervy, aby spotřeba plechu byla při daném objemu co nejmenší ($r/h = 1/2$); určit, jak vysoké mají být stožáry veřejného osvětlení, postavené na přímé cestě s roztečí l , aby cesta byla maximálně osvětlena ($h = l/(2\sqrt{2}) \approx 0,3536l$); jak dlouhý smí být vůz (ideálně zobrazený jako úsečka na obr. 24.1), aby projel z ulice o šířce a do kolmé ulice o šířce b ($l = a\sqrt[3]{1 + (b/a)^{2/3}}$) atd.

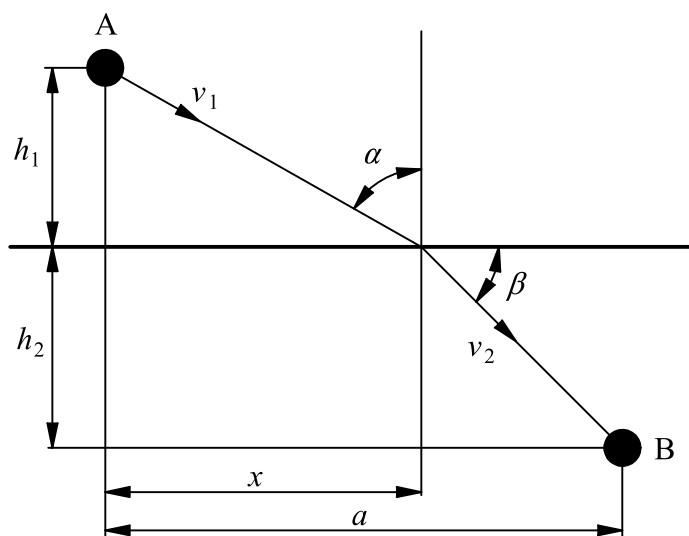


Obr. 24.1

Připomeňme ještě jednu důležitou úlohu z optiky. Paprsek prochází prostředím, v němž se šíří rychlostí v_1 , a dopadá do prostředí s rychlostí šíření v_2 (obr. 24.2). Jakou musíme zvolit dráhu z bodu A do bodu B (oba body jsou dané), aby čas potřebný k proběhnutí paprsku byl nejkratší? Řešení této úlohy vede k rovnici

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{1}{v_2} \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = \frac{\sin \beta}{v_2} = \text{konst.} \quad (24.1)$$

Tato rovnice popisuje lom paprsku na rozhraní dvou prostředí o různé optické hustotě. Je to známý *Snellův zákon* o lomu světla, ale získali jsme jej tentokrát jako matematický důsledek *Fermatova principu* o průletu paprsku v nejkratším čase.

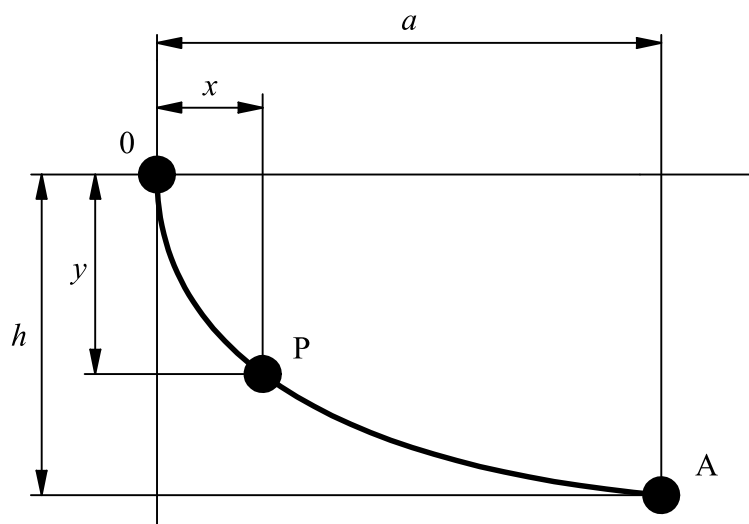


Obr. 24.2

Uvedené příklady se týkají vyhledávání extrémů nějaké funkce. Záhy se však pozornost badatelů z konce 17. století upíná ke zcela novému typu extrémálních úloh, totiž k těm, které daly později vzniknout *variačnímu počtu*. Podnětem k tomu byla výzva Jana Bernoulliho (1677–1748) uveřejněná roku 1696 v časopise *Acta Eruditorum*, jehož vydavatelem byl G. W. Leibniz (1646–1716). Úlohou bylo určit dráhu, která by spojovala dva body

ve svislé rovině (neležící na společné vertikále), po níž by se hmotný bod pohyboval účinkem tíže a bez odporu tak, že by z horního bodu dorazil do spodního v nejkratším čase. Leibniz výzvu doprovodil vlastním posudkem, v němž napsal, že jde o *velmi krásnou a neslýchanou úlohu*.

Bernoulli pak doslova píše: *Smyslem úlohy je, najít mezi nekonečně mnoha křivkami spojujícími oba body takovou, podél které – pokud by byla nahrazena příslušnou tenkou zakřivenou trubicí – by vložená a volně vypuštěná kulička dospěla do druhého bodu v nejkratším čase. Abych však vyloučil jakoukoli dvojnáčetnost, připomínám výslovně, že přijímám Galileovu hypotézu, o níž žádný rozumný geometr nepochybuje, podle níž – pokud nedbáme odporu pohybu – se rychlost padajícího tělesa mění s druhou odmocninou z proběhnutého výškového rozdílu.*



Obr. 24.3

Předpokládejme, že kulička je vypuštěna z bodu O na obr. 24.3 s nulovou počáteční rychlostí, takže v bodě P má podle uvedené hypotézy rychlost $v = \sqrt{2gy}$. Element dráhy má velikost $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ ($y' = dy/dx$). Kulička jej proběhne za čas $dt = ds/v$, takže

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx. \quad (24.2)$$

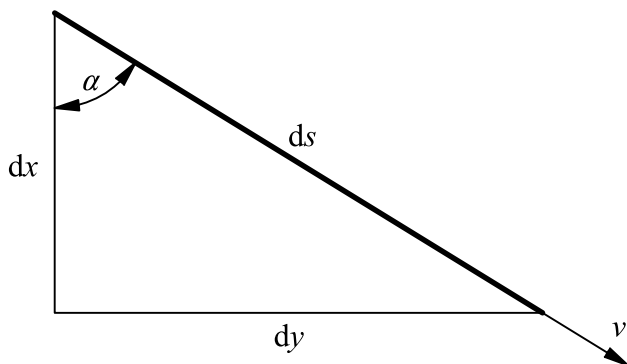
Celkový čas, který má být minimem, dostaneme integrací:

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = \text{minimum.} \quad (24.3)$$

Hodnota integrálu závisí na průběhu funkce $y(x)$, je to tedy *funkcionál*. Vyhledání extrému tohoto funkcionálu je charakteristickou úlohou variačního počtu. V obecném případě jde o úlohu najít neznámou funkci $y(x)$ tak, aby funkcionál

$$J = \int_{x=a}^b F(x, y, y') dx \quad (24.4)$$

nabýval stacionární hodnoty (připomeňme, že hodnota funkce je stacionární, nabývá-li funkce maxima, minima nebo jde-li o inflexní bod s nulovou směrnici tečny v něm).



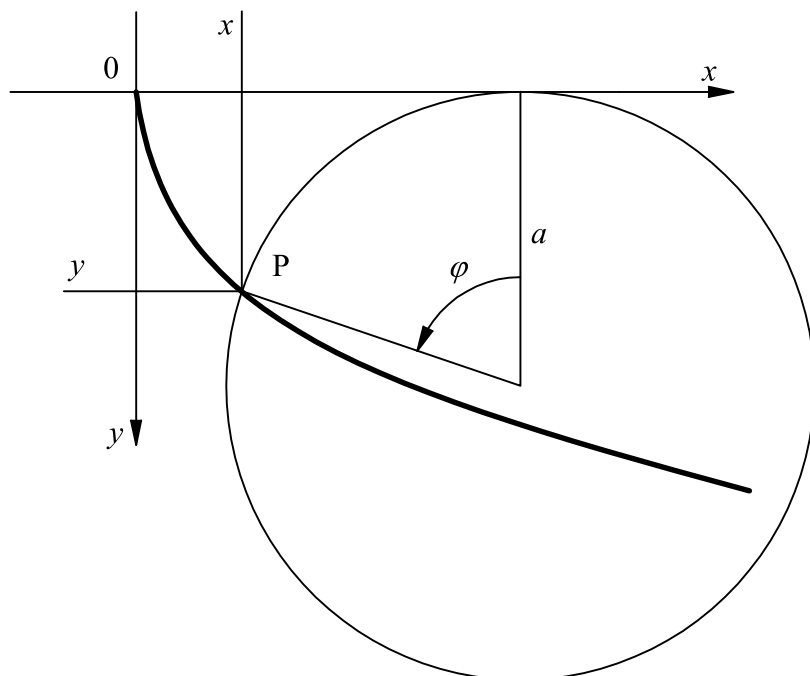
Obr. 24.4

Výzvu Jana Bernoulliho přijali jeho starší bratr Jakub Bernoulli (1654–1705), Leibniz, L'Hospital (1661–1704), Newton (1642–1727) a Huygens (1629–1695). Ti všichni podali správné řešení. Nejjednodušší řešení však podal sám Jan Bernoulli. Vyšel z Fermatova principu (24.1) a předpokládal, že extrémální vlastnost má nejen celá dráha, ale každá její část, tedy i element ds . Podle obr. 24.4 a rovnice (24.1) musí tedy platit, že

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{1}{v} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.},$$

a tedy

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{konst.}, \quad \text{nebo též} \quad y(1+y'^2) = \text{konst.} \quad (24.5)$$



Obr. 24.5

Křivka, která vyhovuje této rovnici, je hledaná *brachystochrona*. Tehdy nebyla k dispozici žádná teorie diferenciálních rovnic, ale z analytických popisů známých křivek bylo možno zkusmo takové rovnice odvodit. Proto Jan Bernoulli snadno rozpoznal, že za rovnicí (24.5) se skrývá cykloida, též cykloida, kterou Huygens již předtím nazval *tautochróna*, křivka, po níž dorazí kulička vypuštěná z libovolného místa do nejnižšího bodu za stejný čas. Najít rovnici cykloidy lze snadno. Podle obr. 24.5 má obecný bod cykloidy souřadnice

$$x = a\varphi - a \sin \varphi, \quad y = a - a \cos \varphi = 2a \sin(\varphi/2). \quad (24.6)$$

Odtud vypočteme derivaci

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \cotg \frac{\varphi}{2}. \quad (24.7)$$

Z rovnice (24.7) vyloučíme úhel φ pomocí druhé z rovnic (24.6) a dostaneme (24.5).

Jakkoli je uvedený postup obdivuhodný, řeší pouze jedinou speciální úlohu. Řešení navržené Jakubem Bernoullim je sice obecnější, ale vede k velmi složitým vzorcům. Průlom v těchto metodách se podařil až Leonardu Eulerovi, který se tak stal zakladatelem nové matematické disciplíny, variačního počtu. Ve spise *Methodus inveniendi linea curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Metoda k nalezení křivek, které se těší extrémálním vlastnostem) podal obecné řešení problému (24.4) originálním a geniálním obratem. K funkci $y(x)$ připočetl její variaci $\delta y = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \eta(x)$, kde $\eta(x)$ je libovolná „rozumná“ funkce definovaná na intervalu $a \leq x \leq b$ tak, že $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Při daných funkcích $y(x)$ a $\eta(x)$ lze variovaný funkcionál (24.4) považovat za funkci f parametru α . Tuto funkci rozvine-
me kolem bodu $\alpha = 0$ v Taylorovu řadu a dostaneme

$$f(\alpha) = \int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx = f(0) + \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx + O(\alpha^2). \quad (24.8)$$

Je-li $y(x)$ hledanou extrémálou, nemůže se hodnota funkcionálu J přidáním nekonečně malé variace δy změnit o více než o nekonečně malou veličinu druhého řádu. To znamená, že se integrál na pravé straně rovnice (24.8) musí rovnat nule. Po jeho integraci per partes vyjde

$$\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx = 0. \quad (24.9)$$

První člen odpadá vzhledem k okrajovým hodnotám funkce $\eta(x)$. Integrál tedy musí být nulový nezávisle na funkci $\eta(x)$ (která je libovolná), takže musí platit *Eulerova rovnice*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (24.10)$$

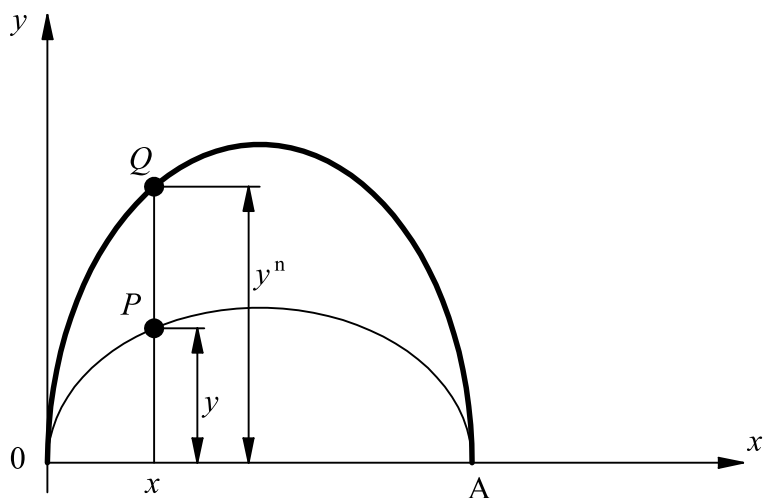
Obdobně jako vymizení derivace funkce při hledání jejího extrému je i splnění Eulerovy rovnice pouze nutnou podmínkou. Dosazením se můžeme přesvědčit, že Eulerova rovnice dává pro úlohu najít extrém funkcionálu (24.3) nelineární diferenciální rovnici

$$2yy'' + 1 + y'^2 = 0. \quad (24.11)$$

Rovnice (24.11) je rovněž rovnicí cykloidy, neboť ji můžeme dostat vyloučením proměnné φ z rovnic (24.6) anebo derivací rovnice (24.5). Její řešení je kupodivu snadné, použijeme-li substituci $y' = p$, a tedy

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p. \text{ S integračními konstantami } x_0, y_0 \text{ dostaneme}$$

$$x + x_0 = y_0 \left[\arcsin \sqrt{\frac{y}{y_0}} - \sqrt{\frac{y}{y_0} \left(1 - \frac{y}{y_0} \right)} \right]. \quad (24.12)$$



Obr. 24.6

Integrační konstanty vypočteme z okrajových podmínek v bodech O, A (obr. 24.3), kde musí platit $y(0) = 0$, $y(a) = h$. Vyjde $x_0 = 0$ a dále transcendentní rovnice pro neznámé y_0

$$a = y_0 \left[\arcsin \sqrt{\frac{h}{y_0}} - \sqrt{\frac{h}{y_0} \left(1 - \frac{h}{y_0} \right)} \right]. \quad (24.13)$$

Tu je třeba řešit numericky.

Bratři Jan a Jakub Bernoulliovi se neměli rádi a vzájemně žárlili na svoje úspěchy. Proto Jakub vyzval na oplátku svého bratra, aby vyřešil následující úlohu. Nad základnou OA je třeba vést křivku OPA délky L takovou, že křivka OQA vedená nad stejnou základnou, jejíž pořadnice jsou však n -tou mocninou pořadnic křivky předchozí, uzavírá maximální plochu (viz obr. 24.6). Matematicky vyjádřeno, hledáme maximum funkcionálu

$$J = \int_{x=0}^a y^n dx = \text{maximum} \quad (24.14)$$

při vedlejší podmínce

$$\int_0^L ds = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2} dx = L = \text{konst.} \quad (24.15)$$

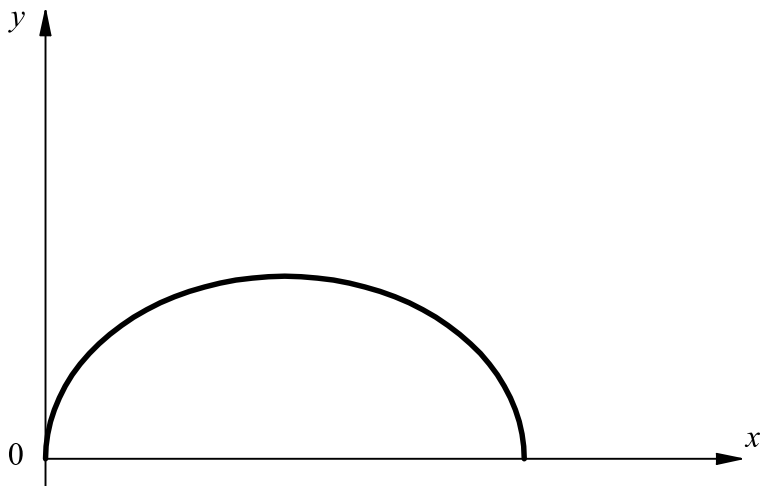
Protože všechny „konkurenční“ křivky $y(x)$ splňují podmínku (24.15) konstantní délky, nazývá se tato úloha *izoperimetrická*. Ačkoli se počátek variačního počtu datuje od výzvy Jana Bernoulliho roku 1696, najdeme izoperimetrické úlohy už ve starověkých pověstech. Publius Vergilius Maro vypráví v prvním zpěvu své *Aeneis* příběh královny Dídó. Ta uprchla z města Tyros (dnešní Súr) do Afriky, když její bratr Pygmalión zavraždil z lakomství jejího manžela Acherbase. Vzala s sebou všechny poklady svého muže a koupila za ně od libyjského krále Iarba tolik země, kolik se dá ohraničit býčí kůží. O tom, jak si Dídó počínala, už Vergilius nepíše, ale poučení o tom nám zanechal římský historik Justinus. Dala kůži rozřezat na nejtenčí proužky (...*in tenuissimas paretas secari*...), aby mohla ohraničit co největší kus pobřeží. Na tomto místě pak 72 let před založením Říma založila město Kartágo. Problém královny Dídó se dá podle obr. 24.7 matematicky formulovat takto: nad pobřežím znázorněným osou x je třeba vést oblouk dané délky tak, aby plošný obsah jím ohraničený byl maximální. Tedy

$$J = \int_0^x y(\bar{x}) d\bar{x} = \text{maximum} \quad (24.16)$$

při vedlejší podmínce

$$\int_0^x \sqrt{1 + [y'(\bar{x})]^2} d\bar{x} = L = \text{konst.} \quad (24.17)$$

Integrační proměnnou jsme označili pruhem, abychom ji odlišili od horní meze integrálu.



Obr. 24.7

Nové na této úloze je, že horní mez integrálu je neznámá. Tuto nesnáz můžeme překonat, když zavedeme novou proměnnou, totiž délku oblouku s . Místo (24.16) a (24.17) dostaneme jedinou rovnici

$$J = \int_0^L y(s) \sqrt{1 - (dy/ds)^2} ds = \text{maximum.} \quad (24.18)$$

Na tento funkcional lze již aplikovat Eulerovu metodu a pomocí (24.10) dokázat, že hledaný oblouk musí být půlkružnice. Avšak toto řešení poznal již ve starověku Zenodoros, a to chytrou úvahou. Křivku na obr. 24.7 doplnil jejím zrcadlovým obrazem. Obsah obou ploch ohraničených uzavřenou křivkou o délce $2L$ bude největší, půjde-li o kružnici. Hledaná

hranice příštího Kartága musí proto mít tvar půlkružnice. Zenodoros také poprvé použil označení „izoperimetrická úloha“.

Poněkud složitější izoperimetrickou úlohu obsahuje jiná starověká báje, kterou ve svém rozsáhlém mnohasvazkovém díle *Ab urbe condita*, věnovaném historii Říma, uvádí Titus Livius. V druhém svazku v kap. 10 líčí hrdinský čin Horatia Coclese, který sám bránil dřevěný most přes řeku Tiberu před útočícími Etrusky, dokud se římským obráncům nepodařilo most zničit. Potom v plné zbroji skočil do řeky a přeplaval k římskému břehu. Za odměnu dostal tolik půdy, kolik byl schopen ohraničit orbou pluhem za jeden den. Předpokládáme-li, že půdu získal na rovném úseku břehu řeky, můžeme úlohu formulovat jako požadavek maxima funkcionálu (viz obr. 24.7)

$$J = \int_0^x y(\bar{x}) d\bar{x} = \text{maximum} \quad (24.19)$$

s vedlejší podmínkou, podle které orač urazí rychlostí $v = ds/dt = \sqrt{1 + y'^2} dx/dt$ celou dráhu za dobu T jednoho dne:

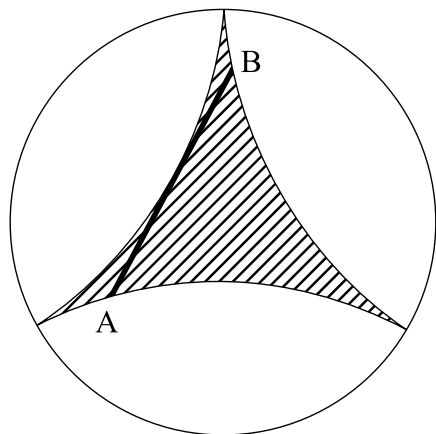
$$T = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(\bar{x}, y)} d\bar{x} = \text{konst.} \quad (24.20)$$

Rychlost pluhu v závisí na souřadnicích x, y , protože se od místa k místu mění kvalita půdy. Kdyby byla tato rychlost konstantní, ztotožnily by se obě poslední úlohy a řešením by byla půlkružnice.

Eulerův spis *Methodus inveniendi* obsahuje sto zajímavých a obtížných příkladů aplikací variačního počtu, takže matematikové mohli k němu v dalších stoletích jen máloco nového dodat. Přesto nalezneme i v moderní matematické literatuře nově formulované úlohy, jejichž řešení přilákalo vynikající matematiky a často vedlo k nečekaným důsledkům.

Například roku 1921 formuloval Zermelo navigační úlohu, která byla natolik náročná, že komplikované řešení podal až Levi-Civita. Nad danou rovinou (představující moře) je zadáno pole rychlostí $\mathbf{v}(x, y, t)$ proudění vody proměnlivé s časem. Loď vyvine relativně k vodě rychlost \mathbf{u} kon-

stantní velikosti, jejíž směr se může měnit. Jakou je třeba zvolit dráhu, aby loď připlula z jednoho daného bodu do jiného v nejkratším čase? Levi-Civita zobecnil tuto úlohu i na trojrozměrný případ.

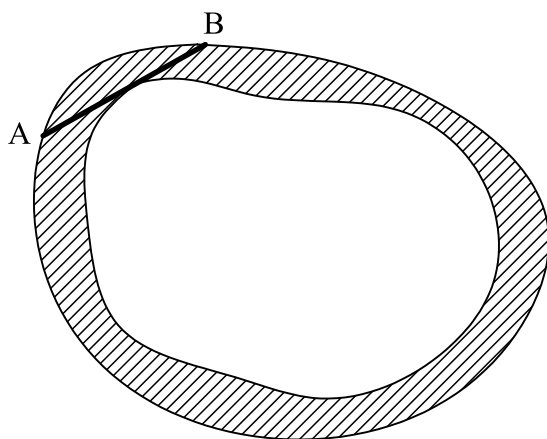


Obr. 24.8

Zdánlivě jednoduchá je úloha Kakeyova (Kakeya) z roku 1917. Jaký tvar má mít nejmenší plošná (rovinná) oblast, aby se v ní mohla otočit úsečka AB o délce \overline{AB} tak, že se její koncové body vzájemně zamění? Jednou takovou oblastí je zajisté kružnice o průměru \overline{AB} , jinou představuje rovnostranný trojúhelník o výšce \overline{AB} , jehož plocha je asi o 26% menší než plocha předchozího kruhu. Konečně třetí možností je oblast vymezená třemi hypocykloidálními oblouky podle obr. 24.8. Vznikne v kruhu o poloměru $3a$ odvalováním jiného kruhu o poloměru a . Tečna AB k oblouku hypocykloidy, vedená v kterémkoli bodě, má konstantní délku $4a = \overline{AB}$. Zdá se, že je to řešení dané úlohy, neboť plocha vymezená třemi oblouky na obr. 24.8 je právě polovinou plochy kruhu o průměru $4a$. Je tedy nejmenší z uvedených tří možností.

Kakeyovu úlohu bychom se mohli pokusit vyřešit také tak, že bychom na nějaké hladké uzavřené křivce podle obr. 24.9 nechali koncové body úsečky AB klouzat. Vytvořilo by se příhraniční pásmo, které je na obr. 24.9 vyznačeno. To však má podle Holditchovy věty plochu právě rovnou ploše

kruhu o průměru \overline{AB} . To snadno pochopíme, rozložíme-li si pohyb na složku translační, vztaženou třeba k dráze těžiště úsečky, a složku rotační. Translační složka k výsledné ploše nijak nepřispívá, protože se plošné přírůstky při zakončení pohybu těžiště úsečky po uzavřené křivce anulují. Rotací úsečky vznikne kruh o průměru AB . Tímto způsobem úsečku sice otočíme, ale záměny bodů A , B nedosáhneme. Řešení podle Kakeyova zadání tak tedy nedostaneme.



Obr. 24.9

Kakeyova úloha má také praktický význam, neboť ji lze alternativně formulovat jako problém najít tvar letiště o nejmenší ploše, na kterém by mohla letadla přistávat v libovolném směru při dané délce přistávací dráhy. Takto formulované úloze by kinematicky vyhovovalo i řešení podle obr. 24.9, ovšem nebyla by to nejmenší možná plocha.

K velkému překvapení matematické obce přinesl časopis *Mathematische Zeitschrift* roku 1928 příspěvek, v němž matematik Besicovitch dokázal, že Kakeyova úloha nemá řešení. Hledaná plocha může být libovolně malá a skládá se z tisíců velmi úzkých a velmi dlouhých trojúhelníků. Řešení, má-li mít praktický smysl, je tedy třeba omezit podmínkou, že hledaná plocha musí mít konečnou velikost.

O variačních principech v mechanice pojednává například LANCZOS (1970). Připomeneme zde jenom nejvýznamnější z nich, *princip Hamilto-*

nův. Podle něho nabývá integrál $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ stacionární hodnoty. Jde-li o skleronomní mechanickou soustavu se silovou funkcí nezávislou na čase, je Lagrangeova funkce $L = T - V$ dána rozdílem kinetické a potenciální energie a je funkcí zobecněných souřadnic q_i a jejich časových derivací (zobecněných rychlostí) \dot{q}_i . Aplikací Eulerovy metody získáme známé *Lagrangeovy rovnice*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (24.21)$$

Jak nás nabádá Cornelius Lanczos (1893–1974), variační počet máme studovat pro jeho půvab, a ovšem také jako doklad toho, že už koncem sedmnáctého století existovala ve vědě čilá mezinárodní spolupráce. A jak jsme ukázali, touha po poznání přírody byla tak silná, že se soutěživost a spolupráce navzájem nevyklučovaly.

Invariantní variační úlohy Emmy Noetherové

Podle slavného Hamiltonova principu, o kterém jsme již pojednali v kap. 9, má být časový integrál Lagrangeovy funkce L v určitých mezích stacionární. Tato funkce je rozdílem kinetické a potenciální energie, $L = T - V$. Variace je přitom libovolná, avšak v koncových bodech integračního intervalu nulová. Musí tedy být

$$\delta A = 0, \quad A = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (25.1)$$

Hamiltonův princip platí pro libovolnou mechanickou soustavu, v níž působí monogenní síly (tj. takové, jejichž složky lze – na rozdíl od polygenních sil – odvodit parciálními derivacemi skalární silové funkce) a vazební podmínky jsou holonomní. Přitom předpokládáme, že silová funkce U nezávisí na zobecněných rychlostech, takže $V = -U$.

Emmy Noetherová (1882–1935) byla dcerou německého profesora matematiky Maxe Noethera (1844–1921), který působil v Heidelbergu a v Erlangenu a studoval algebraické funkce a analytickou geometrii. Emmy se narodila v Erlangenu, avšak během svého života musela jako žena-matematická překonávat mnoho předsudků a protivenství. Svými odbornými pracemi vzbudila pozornost takových osobností, jako byli Klein, Hilbert a Einstein. Když onemocněl její otec, zaskakovala za něj na přednáškách, a tím se dostala k pedagogické práci. Na universitě v Göttingenu se stala oblíbenou a vyhledávanou lektorkou matematiky a po třech letech dostala i malý plat, ale pro svůj židovský původ byla navzdory své proslulosti z university propuštěna a roku 1933 emigrovala do USA, kde po dvou letech v Pensylvánii zemřela. Věnovala se převážně topologii. Svým přesvědčením, že mezi přírodními zákony existují vzájemné vztahy, takže je lze odvozovat z vyšších principů, a že tyto zákony mají – ostatně jako celá příroda – i určitou estetickou hodnotu, například symetrii, byla velmi blízká

Albertu Einsteinovi. Způsob jejího uvažování ukážeme na příkladu Hamiltonova variačního principu podle rovnic (25.1).

Lagrangeova funkce L závisí obecně na zobecněných souřadnicích q_i , zobecněných rychlostech \dot{q}_i a na čase t , takže $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Zkoumejme, co se stane, když počátek odčítání času posuneme o nějakou infinitesimální veličinu α , tj. když zvolíme transformaci

$$t = \hat{t} + \alpha. \quad (25.2)$$

Po dosazení do Lagrangeovy funkce dostaneme $L = L(q_i, \dot{q}'_i, \hat{t} + \alpha)$. Derivace podle času t označíme tečkou, podle času \hat{t} čárkou. Předpokládejme, že Lagrangeova funkce nebude explicitně záviset na čase, takže akční integrál bude

$$A = \int_{\hat{t}_1 + \alpha}^{\hat{t}_2 + \alpha} L(q_i, \dot{q}'_i) d\hat{t}. \quad (25.3)$$

Vidíme, že nově zavedená konstanta α se objevuje pouze v mezích integrálu. Je-li α konstantní, je $dt = d\hat{t}$, takže se akční integrál nezmění. Popisuje stejný problém jako dříve. Opustíme nyní předpoklad, že jde o konstantu, a připustíme závislost veličiny α na čase \hat{t} takovou, že

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = 0. \quad (25.4)$$

To znamená, že se meze integrálu nezmění. Avšak akční integrál bude nyní také funkcí α a v integrandu se objeví i derivace $\alpha'(\hat{t})$. Bude totiž $dt = (1 + \alpha')d\hat{t}$,

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\hat{t}}(1 - \alpha') = \dot{q}'_i(1 - \alpha'). \quad (25.5)$$

Připomeňme, že α' je infinitesimální (nekonečně malá) veličina, takže $(1 + \alpha') = (1 - \alpha')^{-1}$. Takže budeme mít

$$L(q_i, \dot{q}_i) = L(q_i, \dot{q}'_i(1 - \alpha')) = L(q_i, \dot{q}'_i) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i} \dot{q}'_i \right) \alpha'. \quad (25.6)$$

Poslední výraz na pravé straně (25.6) jsme dostali rozvojem funkce na levé straně v Taylorovu řadu a zanedbáním nekonečně malých veličin řádu

většího než prvního. Také jsme přitom využili rovnice (25.5). A tak akční integrál bude mít nový tvar:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, q'_i) d\hat{t} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \alpha' d\hat{t}. \quad (25.7)$$

Transformací (25.2) se naše variační úloha nezměnila, nový tvar akčního integrálu neobsahuje o nic více informací než jeho původní podoba. *Změnil se však počet stupňů volnosti*, neboť do rovnice (25.7) jsme zavedli novou proměnnou, a to $\alpha(\hat{t})$. Tu jsme přidali k dosavadním zobecněným souřadnicím q_i . Lagrangeova rovnice příslušná této nové proměnné je

$$\frac{d}{d\hat{t}'} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0. \quad (25.8)$$

A protože $\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i$ znamená zobecněnou hybnost, dává vztah (25.8) známý *zákon zachování energie* ve tvaru [srovnej s rovnicí (9.24)]

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = H = \text{konst.} \quad (25.9)$$

Tento zákon není nějakou novou rovnicí, kterou bychom musili přidávat k Lagrangeovým rovnicím. Je to jedna z těchto rovnic, jež je důsledkem transformace, kterou zavedla Noetherová a která ponechává akční integrál beze změny. Studiu takových transformací věnovala Noetherová svou práci [NOETHEROVÁ (1918)].

Jako další příklad uvážíme důsledek infinitesimální translace tělesa. Předpokládejme, že platí třetí Newtonův zákon akce a reakce, takže potenciální energie závisí na rozdílech kartézských souřadnic

$$V = V(x_i - x_k, y_i - y_k, z_i - z_k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (25.10)$$

Jde o soustavu, na kterou nepůsobí vnější síly. Zavedeme transformaci

$$\begin{aligned} x_i &= \hat{x}_i + \alpha, \\ y_i &= \hat{y}_i + \beta, \\ z_i &= \hat{z}_i + \gamma. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Tato transformace zřejmě Lagrangeovu funkci L nezmění. Infinitesimální konstanty α až γ opět zobecníme na funkce času, a dostaneme tak tři

nové stupně volnosti pro naši variační úlohu. Tyto stupně volnosti nevstoupí do potenciální energie, ale vstoupí do kinetické energie. Dostaneme totiž

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\dot{x}_i + \dot{\alpha})^2 + (\dot{y}_i + \dot{\beta})^2 + (\dot{z}_i + \dot{\gamma})^2]. \quad (25.12)$$

Výraz v hranaté závorce rozepíšeme a zanedbáme kvadráty infinitesimálních veličin. Výsledek dosadíme do akčního integrálu a upravíme na tvar

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} \hat{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i \dot{\alpha} + \dot{y}_i \dot{\beta} + \dot{z}_i \dot{\gamma}) dt. \quad (25.13)$$

Lagrangeovy rovnice příslušné novým stupňům volnosti α až γ po integraci dají

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i &= c_1, \\ \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i &= c_2, \\ \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i &= c_3. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Je totiž $\hat{x}_i = \dot{x}_i - \dot{\alpha} = \dot{x}_i$, neboť $\dot{\alpha}$ je infinitesimální veličina. Na pravých stranách jsou integrační konstanty. Tyto rovnice vyjadřují známý zákon zachování hybnosti.

Jako poslední příklad uvedeme Lagrangeovu funkci, která je invariantní vzhledem k rotaci. Budeme uvažovat mechanický systém, v kterém působí pouze centrální síly, tj. v kterém potenciální energie závisí pouze na relativní vzdálenosti částic

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}. \quad (25.15)$$

V tomto případě ponechávají infinitesimální translace i rotace souřadnicového systému beze změny potenciální i kinetickou energii. Opět tedy máme případ vhodný pro aplikaci principu Noetherové. Pro stručnost pou-

žijeme vektorové symboliky. Znamená-li Ω vektor infinitesimální rotace, bude transformace souřadnic popsána rovnicí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \Omega \times \mathbf{r}'. \quad (25.16)$$

Bude-li nyní vektor Ω funkcí času, nezmění se výraz pro potenciální energii (do kterého tento vektor nevstoupí), ale změní se výraz pro kinetickou energii. Bude

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_i' + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_i')^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i'^2 + \dot{\Omega} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i' \times \dot{\mathbf{r}}_i'). \quad (25.17)$$

Přidáním vektoru Ω jsme přidali tři nové stupně volnosti. Lagrangeovy rovnice spojené s těmito stupni dají vektorovou rovnici

$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i' \times \dot{\mathbf{r}}_i') = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i) = \text{celkový moment hybnosti} = \text{konst.} \quad (25.18)$$

Dostali jsme tedy *zákon zachování celkového momentu hybnosti* opět jako důsledek transformace (25.16). Platí pro jakýkoli mechanický systém podrobený působnosti centrálních sil, například pro sluneční soustavu. Aplikace tohoto zákona dává známý Keplerův zákon o plochách opsaných průvodičem.

Princip Noetherové lze aplikovat i na Maxwellovy rovnice, z nichž lze odvodit zákon zachování energie v bezzřídlovém elektromagnetickém poli, nebo na Schrödingerovu rovnici, což vede k zákonu zachování pravděpodobnosti výskytu elektrického náboje [LANCZOS (1970)].

Obecně lze říci, že princip Noetherové můžeme aplikovat na jakýkoli variační problém, v němž zavedeme transformaci s infinitesimálním parametrem α , který se v Lagrangeově funkci ruší. Učiníme-li z tohoto parametru novou (přidanou) proměnnou, pak Eulerova-Lagrangeova rovnice spojená s touto proměnnou má vždy tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } A = 0, \quad (25.19)$$

v níž ρ je hustota a A tok příslušné veličiny, která má fyzikální význam. Rovnice (25.19) je pak zákonem zachování této veličiny.

Věty o reciprocitě jako mocný nástroj analýzy

Mezi věty o reciprocitě (o vzájemnosti) řadíme věty Maxwellovy, větu Bettiho a z ní odvozenou identitu Somiglianovu. *Maxwellovy věty* se týkají příčinkových činitelů a byly publikovány roku 1864. Najdeme je snad v každé učebnici pružnosti a pevnosti, popř. nauky o kmitání. Mnohem obecnější *věta Bettiho* pochází z roku 1872 a bývá citována jen zřídka. Poslední z jmenovaných, *identita Somiglianova*, byla formulována roku 1886. Najdeme ji už jen ve speciální literatuře týkající se metody okrajových (hraničních) integrálů resp. prvků, kde se často cituje, avšak bez odvození a náležitého vysvětlení. V době svého vzniku byla považována za matematickou hříčku a upadla nadlouho v zapomnění. Teprve mnohem později v ní matematikové našli užitečný nástroj pro odvození citovaných metod v oboru lineární elasticity.

V této práci se věnujeme formulaci uvedených vět v jejich chronologickém pořadí, a také předpokladům, za nichž platí, a jejich význam ozřejmíme na několika příkladech. Předtím se však ještě zmíníme o *větě Clapeyronově*. U ideálně elastického tělesa se deformační práce staticky působících vnějších sil a momentů ukládá v tělese jako energie napjatosti. Staticky působící síly a momenty rostou do konečné velikosti tak pomalu, že veškerá zrychlení pohybu způsobená deformací jsou zanedbatelná. Potom výsledná energie napjatosti závisí na konečné velikosti zatěžujících sil a momentů *bez zřetele k pořadí, jak byly přikládány*. Pracovní přínosy jednotlivých zatěžujících veličin se jednoduše superponují. Na základě tohoto poznatku Clapeyron dokázal, že *pro lineárně elastický materiál je hustota energie napjatosti homogenní kvadratickou funkcí složek tenzoru napjatosti, resp. tenzoru deformací*.

Věty Maxwellovy a věta Bettiho

Pro lineárně elastický prut nebo rám zatížený soustavou osamělých sil, resp. momentů, definujme soustavu příčinkových činitelů mezi jejich působišti takto:

α_{ij} je posuv v místě i vzniklý působením jednotkové síly v místě j ,

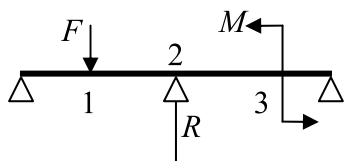
β_{ij} značí posuv v místě i vzniklý působením jednotkového momentu v místě j ,

γ_{ij} je úhel otočení v místě i vzniklý působením jednotkové síly v místě j ,

δ_{ij} je úhel otočení v místě i vzniklý působením jednotkového momentu v místě j .

Vektorové přímky těchto posuvů, resp. úhlů, se shodují s vektorovými přímkami sil, resp. momentů, v témže místě. Pokud tomu tak není, platí Maxwellovy věty jen pro vektorové složky posuvů, resp. úhlů, spadající do vektorové přímky sil, resp. momentů, v daném místě. S použitím těchto příčinkových činitelů lze snadno řešit mnohé běžné úlohy inženýrské praxe.

Chceme například vypočítat reakce ve vnitřní podpěře nosníku podle obr. 26.1.



Obr. 26.1

Vypočteme ji z deformační podmínky, podle které musí být průhyb v této podpěře nulový:

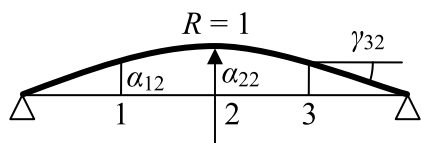
$$w_2 = \alpha_{21}F + \beta_{23}M - \alpha_{22}R = 0. \quad (26.1)$$

Odtud můžeme reakci R vypočítat. Vyjde $R = (\alpha_{21}F + \beta_{23}M) / \alpha_{22}$. Příčinkové činitele je třeba ovšem znát. Jejich tabulku pro nosníky s různými okrajovými podmínkami najdeme například v knize KOŽEŠNÍK (1958). K jejich odvození bychom potřebovali v daném případě třikrát řešit

průhyb nosníku pro jednotková zatížení postupně v místech 1 až 3. Tuto práci nám může uspořít znalost Maxwellových vět, podle kterých

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \beta_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \text{avšak } \beta_{ij} \neq \beta_{ji}, \quad \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}. \quad (26.2)$$

Potom všechny příčinkové činitele potřebné v rovnici (26.1) můžeme odečíst z jediné průhybovky vyšetřené pro nosník zatížený jednotkovou silou v místě 2 podle obr. 26.2.



Obr. 26.2

Zavedeme-li zobecněné posuvy q_i a zobecněné síly Q_i podle definic uvedených v kap. 9, nebudeme musit rozlišovat, zda jde o posuv či o úhel, resp. o sílu či moment, takže místo (26.1) dostaneme

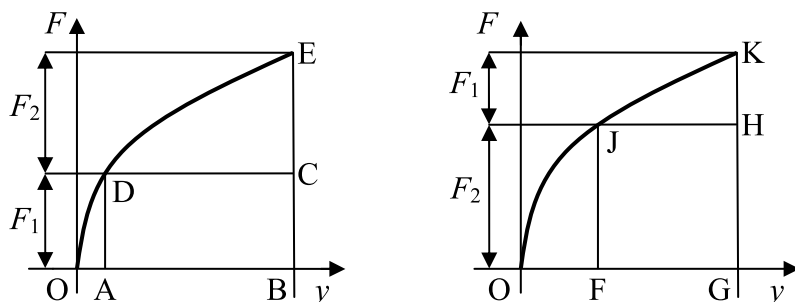
$$q_2 = a_{21}Q_1 + a_{23}Q_3 + a_{22}Q_2 = 0, \quad (26.3)$$

kde $Q_1 = F$, $Q_2 = -R$, $Q_3 = M$. Místo tří vztahů (26.2) dostaneme jediný, a to $a_{ij} = a_{ji}$. V tomto případě se však indexy vztahují k zobecněným veličinám bez ohledu na místo, takže a_{ij} značí i -tý zobecněný posuv vyvolaný j -tou jednotkovou zobecněnou silou. Když rovnici $q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}Q_j$ zapíšeme v maticovém tvaru, tedy $\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$, poznáme v matici \mathbf{A} příčinkových činitelů (v zobecněných souřadnicích) známou *matici poddajnosti*.

Jak ještě ukážeme, Maxwellovy věty jsou přímým důsledkem obecnější věty Bettiho a dají se touto větou plnohodnotně nahradit. *Obě věty platí jen tehdy, platí-li zákon superpozice* (viz kap. 10).

Představme si pružinu s nelineární charakteristikou, jejíž prodloužení y závisí na zatěžující síle F podle vztahu $y = kF^n$. Budeme ji zatěžovat dvěma silami F_1 , F_2 , přičemž $F_1 < F_2$. Nejprve přiložíme sílu F_1 , a tím vykonáme práci rovnou ploše OAD v pracovním diagramu na obr. 26.3 vlevo. Potom přidáme sílu F_2 . Ta způsobí prodloužení pružiny o DC, na němž

první síla vykoná práci danou obdélníkem ABCD; ta bývá někdy v literatuře nazývána prací doplňkovou. Sama druhá síla vykoná práci rovnou ploše DCE.



Obr. 26.3

Obraťme nyní pořadí zatěžování (obr. 26.3 vpravo). Práce síly F_2 je dána plochou OFJ, přiložením další síly F_1 se vykoná doplňková práce daná obdélníkem FGJH, zatímco vlastní přínos práce F_1 je dán plochou JHK. Výsledná práce daná celkovou plochou OBE (obr. 26.3 vlevo) resp. OGK (obr. 26.3 vpravo) je podle Clapeyronovy věty stejná. Je však zřejmé, že dílčí plochy stejné nejsou. Například doplňková práce na obr. 26.3 vlevo vyjde

$$\text{Práce } ABCD = [k(F_1 + F_2)^n - kF_1^n]F_1, \quad (26.4)$$

kdežto táž práce podle obr. 26.3 vpravo je

$$\text{Práce } FGJH = [k(F_1 + F_2)^n - kF_2^n]F_2. \quad (26.5)$$

Ihned je zřejmé, že obě tyto práce mohou být stejné (při nesterjých silách F_1, F_2) pouze když $n = 1$, tj. když platí Hookeův zákon a princip superpozice. A právě rovnost doplňkových prací je předpokladem věty Bettiho. *Tato věta tedy platí jen pro lineární elasticitu a jen tehdy, platí-li zákon superpozice.*

Působící zobecněné síly Q_1, Q_2, \dots, Q_n rozdělíme do dvou skupin, které označíme římskými číslicemi:

$$\text{I } \dots Q_1, Q_2, \dots, Q_k,$$

$$\text{II } \dots Q_{k+1}, \dots, Q_n.$$

Přiložíme-li nejprve všechny síly první skupiny, vykoná se práce $A_{I,I}$. Pak přiložíme síly druhé skupiny. Na deformacích touto skupinou vyvolaných vykonají síly první skupiny doplňkovou práci $A_{I,II}$ a sama druhá skupina vykoná práci $A_{II,II}$. Přehodíme-li pořadí, zůstanou práce $A_{I,I}$, $A_{II,II}$ stejné, zatímco doplňková práce sil druhé skupiny na deformacích působených silami první skupiny bude $A_{II,I}$. Protože výsledná práce musí zůstat stejná, musí platit rovnost doplňkových prací

$$A_{I,II} = A_{II,I}. \quad (26.6)$$

Tato rovnice je matematickým vyjádřením věty Bettiho: práce sil skupiny první vykonaná na deformacích způsobených silami skupiny druhé se rovná práci sil skupiny druhé vykonané na deformacích způsobených silami skupiny první.

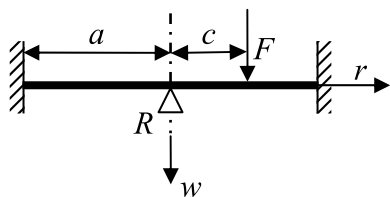
Řekli jsme, že Maxwellovy věty jsou přímým důsledkem věty Bettiho. To můžeme ukázat na příkladu nosníku z obr. 26.1. Do první skupiny zahrneme veličiny F , M a do druhé reakci R . Podle Bettiho věty musí být

$$(-R)(\alpha_{21}F + \beta_{23}M) = F(-R\alpha_{12}) + M(-R\gamma_{32}). \quad (26.7)$$

Protože tento vztah musí platit pro jakékoli síly F , M , musí být

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \beta_{23} = \gamma_{32}.$$

To jsou první dvě Maxwellovy věty vyjádřené rovnicí (26.2). Třetí z těchto vět bychom dostali stejným způsobem, kdybychom k zatěžujícím veličinám přidali ještě jeden moment.



Obr. 26.4

Výhodou Bettiho věty je, že se netýká jen deformací počítaných z osamělých sil a momentů pomocí příčinkových činitelů, ale že je možné ji aplikovat na zatížení jakýmikoli zobecněnými silami.

Jako další příklad uvedeme tenkou kruhovou desku, na obvodě vetknutou, zatíženou excentricky působící silou F (obr. 26.4 nahoře, podpěru s reakcí R dole neuvažujeme). Pro její průhyb dává známá Kirchhoffova teorie vzorec ve tvaru

$$w(r, \varphi) = F f(r, \varphi). \quad (26.8)$$

Vyšetření funkce f polárních souřadnic r, φ je složitá a pracná úloha, analyticky řešitelná pouze užitím dvojitých nekonečných řad.

Představme si nyní, že bychom tuto desku uprostřed podepřeli nepodajnou podpěrou. Chceme-li určit reakci R v této podpěře, musíme ještě vyřešit rotačně symetrickou úlohu o desce zatížené pouze reakcí R podle obr. 26.4 dole, což je relativně snadné. Vyjde

$$\bar{w}(r) = -R \frac{a^2}{16\pi D} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln \frac{r}{a} \right] = -Rg(r). \quad (26.9)$$

Symbol D značí ohybovou tuhost desky. Reakci pak vypočteme z deformační podmínky $w(0, \varphi) + \bar{w}(0) = 0$, a tedy $Ff(0, \varphi) = Rg(0)$. Vyjde

$$R = F \frac{f(0, \varphi)}{g(0)}. \quad (26.10)$$

Známe-li větu Bettiho, můžeme si řešení (26.8) ušetřit (nepotřebujeme je znát). Musí totiž platit vztah

$$F.Rg(c) = R.Ff(0, \varphi). \quad (26.11)$$

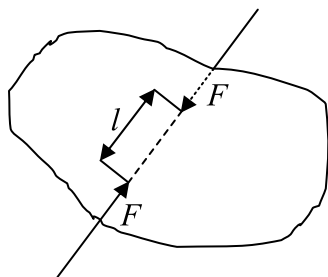
Dosadíme-li (po zkrácení součinem RF) z rovnice (26.11) do (26.10), dostaneme nakonec

$$R = F \frac{g(c)}{g(0)} = F \left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \ln \left(\frac{c}{a}\right) \right]. \quad (26.12)$$

Je-li $c = 0$, zachytí se síla F pouze podpěrou, takže bude v souladu se vzorcem (26.12) $R = F$. Pro $c = a$ musí vyjít $R = 0$.

Je zřejmé, že výraz $g(c)$, resp. $g(0)$, má význam Maxwellova příčinkového činitele α_{RF} , resp. α_{RR} . Považujeme-li vzdálenost c za proměnnou, bude výraz v hranaté závorce v rovnici (26.12) představovat tzv. příčinkovou funkci. Vyneseme-li ji nad desku jako souřadnici z , dostaneme příčinkovou plochu. Ta má rovnici $z(r) = g(r)/g(0)$. Příčinková plocha je rotačně symetrická.

Poslední příklad se bude týkat homogenního izotropního elastického tělesa libovolného tvaru, které sevřeme do svěráku. Ptáme se, jaká tím vznikne změna objemu tělesa. Síly F přenášené ze svěráku jsou stejně velké a opačného směru (obr. 26.5). Vzdálenost jejich působišť je l . Hledanou změnu objemu označíme ΔV .



Obr. 26.5

Abychom úlohu vyřešili, připojíme na povrchu tělesa konstantní tlak p . Ten vyvolá v tělese homogenní napjatost, v níž všechna napětí jsou hlavní a rovna $(-p)$. Účinkem této napjatosti se délka l zkrátí o hodnotu δ . Podle Hookeova zákona bude

$$\delta = (pl/E)(1 - 2\mu). \quad (26.13)$$

Zde E je Youngův modul pružnosti a μ Poissonovo číslo. Na zobecněné síly F, p nyní aplikujeme větu Bettiho:

$$(-p)\Delta V = F\delta. \quad (26.14)$$

Z posledních dvou rovnic vyjde hledaná změna objemu:

$$\Delta V = -\frac{Fl}{E}(1 - 2\mu). \quad (26.15)$$

Záporné znaménko na pravé straně poslední rovnice znamená, že se objem V tělesa působením síly F zmenší. Protože jde o těleso zcela obecného tvaru, je zřejmé, že tento vzorec v uzavřeném tvaru nemůžeme dostat žádnou jinou metodou. Tento příklad dokládá neobyčejnou působnost Bettiho věty, která je v učebních textech často podceňována.

Identita Somiglianova

Definujme lineárně elastické homogenní těleso zaujímající oblast Ω s hranicí Γ . Je zatíženo tak, že v něm vzniká napjatost popsaná tenzorem napjatosti σ_{ij} , tenzor deformací je ε_{ij} , posuvy u_i , zatěžující povrchové trakční vektory (vektory napětí) t_i a objemové síly b_i ($i, j = 1, 2, 3$). Stejně těleso můžeme alternativně zatížit také jinak. Abychom oba případy odlišili, zavedeme veličiny označené hvězdičkou. Budeme tedy mít oblast Ω^* , hranici Γ^* , napjatost σ_{ij}^* , deformaci ε_{ij}^* , posuvy u_i^* , trakční vektory t_i^* a objemové síly b_i^* . Použijeme Einsteinovo součtové pravidlo (podle dvakrát opakovaných indexů se sčítá od 1 do 3).

Snadno dokážeme platnost identity

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega. \quad (26.16)$$

Stačí totiž dosadit z Hookeova zákona $\sigma_{jk} = C_{jkpq} \varepsilon_{pq}$ (obdobný vztah platí i pro tenzory s hvězdičkou, přičemž elastické moduly C_{jkpq} zůstávají stejné) a využít známé symetrie v indexech (lze zaměnit indexy v každé dvojici a u elastických modulů také obě dvojice). Dále můžeme například druhý integrand v poslední rovnici rozepsat takto:

$$\varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j}) \sigma_{jk}^* = \frac{1}{2} u_{j,k} \sigma_{jk}^* + \frac{1}{2} u_{k,j} \sigma_{kj}^* = u_{j,k} \sigma_{jk}^* = u_{j,k} \sigma_{kj}^*. \quad (26.17)$$

Index za čárkou znamená parciální derivaci, takže např.

$u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k$. Výraz (26.17) dosadíme na pravou stranu rovnice (26.16) a integrujeme per partes. Vyjde

$$\int_{\Omega} u_{j,k} \sigma_{kj}^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_j \sigma_{kj}^* n_k d\Gamma - \int_{\Omega} u_j \sigma_{kj,k}^* d\Omega. \quad (26.18)$$

Z matematické teorie pružnosti je známo, že diferenciální rovnice rovnováhy umožňují zavést do posledního integrálu objemové síly, neboť $\sigma_{kj,k}^* = -b_j^*$. Kromě toho platí, že $\sigma_{kj}^* n_k = t_j^*$. Obdobně upravíme v rovnici (26.16) i první integrál. Nakonec dostaneme

$$\int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} t_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} t_j u_j^* d\Gamma. \quad (26.19)$$

V této rovnici poznáváme známou větu Bettiho. Zdánlivě jsme k tomuto odvození nepotřebovali vyjadřovat rovnost doplňkových prací. Ve skutečnosti jsme využili symetrie v indexech modulů pružnosti, která se podle Greena odvozuje z úvah o energii, což je analogický postup.

V rovnici (26.19) patří symboly bez hvězdiček k vyšetřovanému problému, kdežto symboly s hvězdičkami jsou doplňkem, který jsme si vymysleli zatím libovolně. Pro obě pole však platí základní zákony teorie elasticity, takže například posuvy u_j^* musí vyhovovat Navierově rovnici

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\mu} u_{k,kj}^* = -b_j^*. \quad (26.20)$$

Nyní se rozhodneme, že za tyto posuvy v místě daném vektorem \mathbf{x} zvolíme ty, které vyvolá osamělá jednotková síla o složkách e_i působící ve směru osy i v místě ξ . Označíme je $u_{ij}^* = u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$. Podle (26.20) pak bude

$$G u_{ij,kk}^*(\xi, \mathbf{x}) + \frac{G}{1-2\mu} u_{ik,kj}^*(\xi, \mathbf{x}) = -\Delta(\xi, \mathbf{x}) e_i. \quad (26.21)$$

Symbolem $\Delta(\xi, \mathbf{x})$ jsme označili Diracovu funkci delta, která má tyto vlastnosti:

$$\Delta(\xi, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \xi \neq \mathbf{x},$$

$$\Delta(\xi, \mathbf{x}) = \infty \quad \text{pro } \xi = \mathbf{x},$$

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \Delta(\xi, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) = g(\xi).$$

Symbolem e_i jsme označili složky vektoru, který má – je-li zapsán v maticové formě – v i -tém řádku jedničku, jinak nuly. Do vztahu (26.19)

tedy dosadíme $u_j^* = u_{ij}^* e_i$. To jsou všechny složky posuvů vyvolaných jednotkovým vektorem b_i působícím v bodě ξ ve směru i -té souřadnicové osy.* Protože z těchto posuvů můžeme odvodit tenzor poměrných deformací a pomocí Hookeova zákona i tenzor napětí, z něho pak i trakční vektor na povrchu Γ , bude též platit, že $t_j^* = t_{ij}^* e_i$. Tyto výrazy nyní dosadíme do rovnice (26.19). Protože

$$\int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega = \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(\xi, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) e_i d\Omega(\mathbf{x}) = u_i(\xi) e_i, \quad (26.22)$$

vyjde nakonec

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}). \quad (26.23)$$

Činitel e_i , který se v rovnici (26.23) vyskytoval u každého členu a pouze vybíral z každého tohoto členu – vektoru – právě i -tý řádek, jsme „zkrátili“. Přesněji řečeno, tento vektor se vzhledem k své struktuře po vynásobení ve výsledku neobjevuje. Rozumí se samo sebou, že vztah (26.23) představuje soustavu tří rovnic (pro $i = 1, 2, 3$).

Rovnice (26.23) je slavná *Somiglianova identita*. Hvězdičkou označená pole známe, protože jsme je zvolili. Poslední (objemový) integrál můžeme vypočítat, protože známe celý integrand. Také první a druhý integrál můžeme ve dvou krocích vypočítat, protože posuvy u_j a trakční vektory t_j na povrchu po částech známe (to jsou okrajové podmínky). Zbývající neznámé hodnoty těchto veličin na povrchu dostaneme vyřešením integrální rovnice na hranici Γ , kterou dostaneme, když v rovnici (26.23) přejdeme k limitě $\xi \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{x}} \subset \Gamma$. Po vyřešení této rovnice dostaneme ze vztahu (26.23) nakonec i posuvy u_i uvnitř tělesa. To je základ metody okrajových integrálů, kterou lze upravit zavedením okrajových elementů pro numerická řešení. Její podstatná výhoda je, že se řešení převádí z definiční oblasti Ω na její hranici Γ . To je při numerickém řešení méně náročné na potřebný počet

* Vektor \mathbf{b} má složky b_i , Soubor těchto tří složek vektor určuje, takže symbol b_i rovněž nazýváme „vektor“. Stejně zvyklostí užíváme i u tenzorů.

stupňů volnosti, ale tato výhoda je vykoupena větší matematickou náročností úlohy.

Dosud jsme se nezmínili o tom, jaké zvolíme pro posuvy u_j^* okrajové podmínky na hranici Γ^* . Aby se řešení zjednodušilo, využijeme toho, že hranice Γ^* nemusí být totožná s hranicí Γ . Můžeme ji posunout do nekonečna a zvolit tam nulové okrajové podmínky. To znamená, že funkce u_j^* bude *fundamentálním řešením* Navierovy diferenciální rovnice (26.20) (Kelvinova úloha). Okrajové integrály v rovnici (26.23) budou definovány na hranici Γ stejně jako dříve. To znamená, že z nekonečného tělesa $(\Omega^* + \Gamma^*)$ uvolníme těleso $(\Omega + \Gamma)$ a vypočteme hvězdičkou označené hodnoty u_{ij}^*, t_{ij}^* na hranici Γ . Ty pak vstoupí do integrálů v rovnici (26.23).

O třech způsobech výkladu Gaussovy integrační formule

Vynikající filosof, matematik a fyzik, profesor PhDr. Emanuel Herolt, který autora učil na reálném gymnáziu (dřívější reálce) matematiku a fyziku blahé paměti, říkal, že tyto předměty nejsou od toho, aby někoho naučily stavět prasečí chlívky. Jsou tu proto, aby nás naučily přesně myslet a přesně mluvit. Na to se v současné době, zdá se, neklade dostatečný důraz. Matematika má pro studenty mnohem širší význam, než se jeví těm, kdo se domnívají, že jde jen o to, naučit se pár vzorečků. Je důležitá pro rozvoj racionálního myšlení, a to i u těch, kteří se nestanou profesionálními matematiky. Matematika není oblíbená, zdá se dokonce, že mnohdy není oblíbená ani u těch, kteří ji učí. Na „neoblíbenosti“ matematiky se podle autorova názoru podepsala feminizace učitelských sborů a také to, že výuka matematiky byla na základním a středním stupni školství v druhé polovině minulého století svázána osnovami často nepřiměřeně náročnými věku žáků či studentů, což napravovaly instrukce a školení učitelů a středoškolských profesorů pořádané ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy, kam spadaly snad i cirkusy a lunaparky. Mnozí učitelé (či ještě častěji učitelky) – naštěstí ne všichni – se domnívali, že těžší tě výuky je v memorování vzorců a důkazů. Nedokázali učinit z výuky matematiky dobrodružství poznání a zatížili matematiku formalismem, což platí na mnoha středních i vysokých školách dodnes. Matematika byla nedávno dokonce vyřazena z povinných maturitních předmětů, což je podle autorova mínění chyba, kterou bude naše společnost později, až se prokáže neudržitelnost tohoto rozhodnutí, jen velmi obtížně napravit. Nejde o to, aby všichni měli maturitu, ale o to, vrátit maturitě původní význam zkoušky dospělosti. Maturitní vysvědčení potvrzovalo schopnost tvořivého myšlení a všeobecnou vzdělanost. To je bez matematiky nemožné.

Nezáleží jen na osnovách a na metodě výuky, ale také – snad ještě více – na osobnosti učitele, na jeho schopnosti dát studentům motivaci a chuť ke studiu, které samozřejmě vyžaduje soustavnost, soustředěnost a kázeň.

Doložíme svá odvážná tvrzení příkladem ze života. Vysoká škola v Liberci založená roku 1953, dnešní Technická univerzita, získávala kvalitní učitele jen obtížně. V matematice však měla štěstí. Zpočátku, byť krátce, tam učili tak vynikající pedagogové jako profesoři Nožička a Havlíček (oba později působili na Karlově universitě), po nich pak docenti Alda a Bečvář, oba pozdější vědečtí pracovníci Matematického ústavu ČSAV (nyní AV ČR). Přišla však doba „normalizace“ a do vedení katedry se dostal pedagog, který požadoval od studentů, aby si jeho „přednášky“ zapisovali do sešitu na sudé stránky a do příští lekce je opsali na stránky liché. To byl způsob, jak studenty motivovat, aby se učili matematiku.

Uvedená zkušenost přivedla autora k sepsání tohoto příspěvku. V něm porovnáme tři způsoby odvození Gaussovy integrační formule a ponecháme na čtenářích, aby se zamysleli nad tím, který způsob by jim ve výuce matematiky nejlépe vyhovoval. Gaussův vzorec jsme vybrali proto, že má velký význam například pro metodu konečných prvků, což je moderní výpočetní prostředek pro všechna odvětví mechaniky. Připomínáme, že v roce 2007 uplynulo právě 230 let od narození tohoto matematického velikána.

1. Důraz na rigoróznost

Učebnice numerické matematiky [RALSTON (1973)] byla v sedmdesátých letech minulého století oblíbená mezi matematiky i inženýry. Výklad numerické integrace začíná definicí operátoru numerické kvadratury ve tvaru *

$$L[f(x)] = f(b) - f(a) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} f^{(i)}(a_{ij}). \quad (27.1)$$

Za $f(x)$ dosadíme funkci $\int_{-\infty}^x g(x)dx$ a dostaneme

$$L[f(x)] = L\left[\int_{-\infty}^x g(x)dx\right] = \int_a^b g(x)dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} g^{(i-1)}(a_{ij}). \quad (27.2)$$

* Pokud čtenář nepozná význam použitých symbolů z kontextu, najde je v jiných kapitolách citované učebnice.

Rovnice pro kvadraturu pak bude

$$\int_a^b g(x)dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} g^{(i-1)}(a_{ij}) = E. \quad (27.3)$$

Srovnáním posledních dvou rovnic poznáváme, aniž to autor citované práce vysvětluje, že operátor L generuje chybu E .

Zvolíme-li chybu $E = 0$ a řešíme-li rovnici (27.3) vzhledem k $\int_a^b g(x)dx$, dostaneme aproximaci určitého integrálu funkce $g(x)$ jako lineární kombinaci hodnot funkce $g(x)$ a jejích derivací.* Problém numerické integrace spočívá v určení koeficientů A_{ij} a bodů a_{ij} tak, aby tato aproximace dosahovala žádané přesnosti. Nejdůležitější případ odpovídá hodnotě $m = 1$. Tehdy do výpočtu vstupují pouze funkční hodnoty, a nikoli derivace. Po některých změnách v označení dostaneme pro tento případ vzorec

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j) + E. \quad (27.4)$$

Předpokládejme nyní, že meze a a b jsou ve vzorci (27.4) konečné. Má-li být vzorec přesný pro polynomy stupně nejvýše $2n - 1$, můžeme dostat soustavu $2n$ rovnic pro $2n$ neznámých konstant tím, že dosadíme $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, a položíme $E = 0$. Dostaneme nelineární rovnice, které – lze-li je řešit a řešení je reálné – nám dají uzly a koeficienty, jež hledáme. Algebraický přístup k našemu problému však opustíme a přidržíme se přístupu analytického, který nám:

1. řekne, jsou-li koeficienty a uzly reálné nebo ne, aniž je počítáme;
2. umožní určit E v případě, že $f(x)$ není polynom stupně nejvýše $2n - 1$;
3. umožní ukázat, že souřadnice uzlových bodů a_j jsou v mnoha případech kořeny známých polynomů. Jak uvidíme, lze koeficienty snadno vypočítat, jakmile jsou uzly známy.

Výchozím bodem pro analytický postup je Hermiteův interpolační vzorec

* Text je doslovně převzat z Ralstonovy učebnice. Věta by mohla být mylně vykládána tak, že chyba aproximace je obecně nulová, což je nesmysl. Z rovnosti se stane přibližná rovnost, což není řečeno.

$$f(x) = \sum_{j=1}^n h_j(x)f(a_j) + \sum_{j=1}^n \bar{h}_j(x)f'(a_j) + \frac{p_n^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad (27.5)$$

který je přesný pro polynomy stupně nejvýše $2n - 1$. Integrujeme-li (27.5) od a do b , dostaneme

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j) + \sum_{j=1}^n \bar{H}_j f'(a_j) + E, \quad (27.6)$$

kde

$$H_j = \int_a^b h_j(x)dx, \quad \bar{H}_j = \int_a^b \bar{h}_j(x)dx, \quad E = \int_a^b \frac{p_n^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)dx.$$

Protože E je rovno nule, je-li $f(x)$ polynom stupně nejvýše $2n - 1$, pak (27.6) bude mít tvar (27.4) se žádanými vlastnostmi, budeme-li moci zvolit uzly tak, aby $\bar{H}_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Tento požadavek je nejen postačující podmínkou k dosažení požadované přesnosti, ale je to i podmínka nutná. Abychom se o tom přesvědčili, položíme v (27.4) $f(x) = h_j(x)$. Má-li mít (27.4) řád $2n - 1$, pak H_j v (27.4) musí být totožné s koeficienty H_j v (27.6). Protože jsme na uzly nekladli žádná omezení, neexistuje žádný vzorec typu (27.4) s řádem přesnosti $2n - 1$, jestliže nelze najít takové uzly, pro něž jsou koeficienty \bar{H}_j rovny nule.*

V Ralstonově učebnici se dovíme, jak podmínka $\bar{H}_j = 0$ vede k závěru, že polynom $p_n(x)$ je ortogonální k polynomům do stupně $n - 1$, že je tedy násobkem Legendreova polynomu, který má vždy n reálných kořenů, a tyto kořeny jsou hledané souřadnice uzlových bodů.† Následuje také odvození potřebných koeficientů a chyby metody. To již nebudeme uvádět.

* Také tento téměř nesrozumitelný důkaz je doslova převzat z Ralstonovy práce.

† Polynom $p_n(x)$ je totožný s polynomem $F_n(x)$ z rovnice (27.11).

2. Důraz na snadnou srozumitelnost

Učebnice [MATHEWS–WALKER (1965)] je určena fyzikům a klade jen minimální požadavky na předběžné matematické znalosti. K odvození Gaussova integračního vzorce použijeme podle ní aproximaci ve tvaru

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \quad (27.7)$$

a budeme požadovat, aby byla přesná pro jakýkoli polynom pátého nebo nižšího stupně. To je možné, protože polynom pátého stupně má šest koeficientů a aproximace (27.7) má šest neznámých konstant c_i, x_i . Hodnoty c_i popř. x_i by mohly být tedy určeny přímo z tohoto požadavku, ale rovnice takto získané by byly obtížně řešitelné (například nelineární v hodnotách x_i). Použijeme proto jakéhosi triku, abychom získali nejprve hodnoty x_i ; zbylé hodnoty c_i určíme později.

Jak si budeme počínat? Uvažme nejprve polynom, jehož kořeny jsou x_i :

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (27.8)$$

Když tento polynom použijeme ve vzorci (27.7), dostaneme na pravé straně nulu. Jak bylo řečeno, předpokládáme, že naše metoda je přesná pro polynomy do pátého stupně, takže bude nulová i levá strana. Nulu dostaneme dokonce i pro integrál

$\int_a^b g(x)\Phi(x)dx$ pro jakoukoli funkci $\Phi(x)$. Protože polynom $g(x)$ je třetího stupně, musí přesně platit všechny tři následující rovnice:

$$\int_a^b g(x)dx = 0, \quad \int_a^b xg(x)dx = 0, \quad \int_a^b x^2g(x)dx = 0. \quad (27.9)$$

To jsou podmínky „ortogonalit“, které určují funkci $g(x)$ (až na nějakou multiplikační konstantu), a tedy i hodnoty x_i . Zvolíme-li bez újmy na obecnosti $a = -1, b = +1$, bude funkce $g(x)$ právě Legendreovým polynomem $P_3(x)$. Souřadnice uzlových bodů x_i jsou proto kořeny tohoto polynomu. Zobecnění pro více než tři body je snadné.

Váhové koeficienty c_i ve vzorci (27.7) určíme podobně, tj. budeme požadovat, aby metoda byla přesná pro $f(x) = 1, x, x^2$. To dává tři rovnice

$$b - a = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2.$$

(V našem případě $a = -1, b = +1$.) Tyto rovnice lze řešit, protože x_i už známe.

3. Důraz na intuici a objevnost

Třetí způsob odvození Gaussova vzorce převezmeme z díla [LANCZOS (1957)]. Autorem je světoznámý teoretický fyzik. Většina čtenářů bude znát nejspíše jeho metodu vyhledávání vlastních čísel a vlastních vektorů matic; je uvedena i v publikaci [RALSTON (1973)].

Budeme předpokládat, že jsme určitý integrál $\int_a^b \varphi(t)dt$ transformovali na standardní tvar $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ a budeme hledat aproximaci tohoto transformovaného integrálu. Pro funkční hodnoty zvolíme označení $f(x_i) = y_i$. Zvolíme konečný počet bodů („uzlů“) n , takže bude $i = 1, 2, \dots, n$. Zvolenými body (o jejich rozmístění rozhodneme později) proložíme Lagrangeův interpolační polynom stupně $(n - 1)$. Připomeneme, jak se takový polynom tvoří. Například pro $n = 4$ dostaneme třetí polynom ($i = 3$)

$$Q_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}. \quad (27.10)$$

V čitateli (27.10) „chybí“ činitel $(x - x_3)$ a ve jmenovateli je totéž co v čitateli, avšak s hodnotou x_3 místo x . Pro obecný stupeň n interpolačního polynomu dostaneme i -tý Lagrangeův polynom ve tvaru

$$Q_i(x) = \frac{1}{F'_n(x_i)} \frac{F_n(x)}{x - x_i}, \quad (27.11)$$

kde $F_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Například pro $n = 4$ dostaneme $F_4(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Zvolíme-li dále $i = 3$, dá vzorec (27.11) polynom (27.10). Čitatel v rovnici (27.10) je přitom $F_4(x)/(x-x_3)$, jmenovatel $F_4'(x_3)$; čárka značí derivaci podle x . Polynom (27.10) je nulový v prvním, druhém a čtvrtém bodě, kdežto v třetím bodě nabývá hodnoty 1. S použitím Kroneckerova symbolu δ_{jk} , který je jednotkový pro $j = k$ a jinak nulový, můžeme obecně psát, že

$$Q_j(x_k) = \delta_{jk}. \quad (27.12)$$

Hledaný Lagrangeův interpolační polynom pak je

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \dots + y_n Q_n(x). \quad (27.13)$$

Nahradíme-li tímto polynomem danou funkci $y = f(x)$, dostaneme místo přesné hodnoty A integrálu

$$A = \int_{-1}^{+1} f(x) dx \quad (27.14)$$

jeho přibližnou hodnotu

$$\tilde{A} = \int_{-1}^{+1} P_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n y_k \int_{-1}^{+1} Q_k(x) dx. \quad (27.15)$$

Integrál

$$w_k = \int_{-1}^{+1} Q_k(x) dx \quad (27.16)$$

můžeme považovat za váhu (váhový koeficient), kterou přisuzujeme hodnotě y_k , takže \tilde{A} dostáváme jako „vážený součet“ funkčních hodnot y_k ze vztahu

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n w_k y_k. \quad (27.17)$$

Koeficient w_k přitom závisí na volbě souřadnic x_i uzlových bodů, nikoli však na funkčních hodnotách y_i . Vzorec (27.17) nahrazuje hledaný integrál váženým součtem jistého počtu pořadnic (funkčních hodnot), což je podstata kterékoli integrační metody, ovšem s výjimkou těch, které využívají i de-

rivace funkce v uzlových bodech. Vzorec je přesný pro polynomy až do stupně $n-1$.

Zkoumejme, co se stane, když k množině vybraných bodů x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) přidáme ještě jeden bod x_{n+1} , abychom zvýšili přesnost vzorce (27.17) (bude pak přesný pro polynomy až do stupně n). Z definice je zřejmé, že Q_{n+1} je úměrné $F_n(x)$. Na příklad pro $n = 3$ by bylo

$$Q_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \text{konst.} \cdot (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \text{konst.} \cdot F_3(x). \quad (27.18)$$

Takže

$$w_{n+1} = \text{konst.} \int_{-1}^{+1} F_n(x) dx. \quad (27.19)$$

Nový bod x_{n+1} můžeme zvolit tak, aby se součet (27.17) nezměnil. Stačí totiž požadovat, aby vyšlo $w_{n+1} = 0$. *V takovém případě nepotřebujeme hodnotu y_{n+1} vůbec znát, násobí se nulou.* Podmínka $w_{n+1} = 0$ představuje jednu vazbu mezi hodnotami x_1, x_2, \dots, x_n . Zvolíme tedy ještě jeden bod, x_{n+2} , a dostaneme další vazbu mezi souřadnicemi uzlových bodů. Podle (27.16) vyjde

$$w_{n+2} = \int_{-1}^{+1} Q_{n+2}(x) dx = \text{konst.} \int_{-1}^{+1} F_{n+1}(x) dx = \text{konst.} \int_{-1}^{+1} (x-x_{n+1}) F_n(x) dx = \text{konst.} \int_{-1}^{+1} x F_n(x) dx. \quad (27.20)$$

Přitom jsme využili toho, že $w_{n+1} = \text{konst.} \int_{-1}^{+1} F_n(x) dx = 0$.

Tak postupujeme dále, až budeme mít celkem $2n$ uzlových bodů, z nichž pro výpočet součtu (27.17) potřebujeme fakticky jen polovinu. Přesto náš vzorec bude nyní přesný pro polynomy až do stupně $2n-1$. Z podmínek nulových vah w_{n+1} až w_{2n} přitom dostaneme soustavu n rovnic

$$\int_{-1}^{+1} x^\alpha F_n(x) dx = 0, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n-1). \quad (27.21)$$

Rovnicím (27.21) lze vyhovět jen zcela určitou volbou hodnot x_1, x_2, \dots, x_n . Tyto podmínky vyžadují, aby $F_n(x)$ bylo na daném intervalu ortogonální (s vahou 1) k mocninám x^α . Takovou vlastnost mají Legendreovy polynomy. Funkce $F_n(x)$ je vskutku násobkem n -tého Legendreova polynomu, vyjádřeného – odhlédneme-li od multiplikační konstanty – jako součin kořenových činitelů. Podmínky (27.21) budou proto platit, budou-li souřadnice uzlů x_i kořeny tohoto polynomu. Známe-li kořeny, vypočteme z rovnic (27.10) a (27.16) i příslušné váhové činitele.

Diskuse

První způsob odvození Gaussova integračního vzorce bude asi nejlépe vyhovovat matematicky erudovaným čtenářům. Postupuje se od obecného ke zvláštnímu, zkoumá se nejprve řešitelnost úlohy, aniž ji řešíme apod. Nevýhodou je, že použitá symbolika není vysvětlována průběžně a není uvedena ani v žádném přehledu, takže méně zběhlý čtenář, který hledá poučení jen o dílčím problému, si musí doplňovat informace jinde. Aplikačně zaměřený inženýr, který chce znát základ metody, bude pravděpodobně unaven klikatou cestou, než se dobere hledaného poznání.

Druhý způsob uvítají právě inženýři, kteří chtějí rychle a snadno pochopit základ metody. Tu znají zpravidla jen podle návodů uvedených v učebnicích metody konečných prvků, často bez náležitého odvození. Budou přitom žasnout nad „trikem“, kterým lze snadno předem získat souřadnice uzlových bodů. Tento trik však nespádl z nebe, pozorný čtenář si všimne souvislosti s třetím způsobem. Zjistí totiž, že $g(x) \equiv F_3(x)$.

Třetí způsob upoutá asi nejvíce čtenáře zvědavého, kterého baví objevovat širší souvislosti. Nápad, jak podstatně zvýšit přesnost vzorce (27.17), aniž ho změníme, a to postupným přidáváním bodů s nulovými váhovými koeficienty, je fascinující. Pokud by byly uzlové body libovolné, byl by integrační vzorec přesný pro polynomy jen do n -tého stupně. Vzdáme-li se této libovolnosti, tj. zvolíme-li uzly podle Gaussova návodu, dosáhneme

s tímž počtem funkčních hodnot $f(x_i)$ přesnosti pro polynomy až do stupně $2n - 1$, tedy stejné přesnosti, pro kterou bychom jinak potřebovali ještě dalších n hodnot, například první derivace $f'(x_i)$. To znamená, že bychom měli zadánu v uzlových bodech nejen funkční hodnotu, ale také hodnotu směrnice tečny.

A co ty, milý čtenáři, kterému výkladu dáváš přednost?

Diskrétní a kontinuální modely

Zeptáme-li se někoho, kdo je vzdělán v humanitárních vědách, co považuje za opak slova *diskrétní*, odpoví, že *indiskrétní*. Zeptáme-li se znalce mechaniky, pravděpodobně alespoň některý řekne, že opakem je slovo *spojitý*. My budeme mít v tomto příspěvku na mysli právě tento druhý případ. Při výpočtu statických deformací i vibrací modelujeme někdy pravidelné struktury složené z jednotlivých konstrukčních prvků jako soustavy s konečným počtem stupňů volnosti, jindy je zjednodušujeme tím, že je nahrazujeme spojitým hladkým modelem, který má těchto stupňů nekonečný počet. Někdy postupujeme obráceně. Záleží na tom, jaké výsledky sledujeme a jakou požadujeme jejich přesnost, a ovšem také na tom, jaké výpočtové prostředky máme k dispozici. Na jednoduchých příkladech uvedeme rozdíly, které takovým postupem vznikají.

Nejprve se budeme zabývat řešením podélných vibrací v nekonečně tenké elastické homogenní tyči. Platí-li Hookeův zákon, je teorie vibrací s malými amplitudami lineární a řešení je snadné. Je uvedeno snad v každé učebnici nauky o kmitání. Šíří-li se takovou tyčí vlna, nemění svůj tvar. Říkáme, že prostředí je *bezdisperzní*. Pro numerický výpočet nahrazujeme kontinuální tyč například soustavou (řetězcem) hmotných bodů spojených pružinami. Tyto hmoty jsou oddělené, soustava je proto diskrétní. Vykazuje *disperzi* obecného tvaru vlny, protože rychlost šíření každé její harmonické složky závisí na frekvenci této složky. Jelikož jde o úpravu fyzikálního modelu, mluvíme o *fyzikální diskretizaci*. Někdy zasahujeme obdobným způsobem do matematického modelu. Řešíme například deformaci pružného prostě podepřeného nosníku, který má nespočetné množství stupňů volnosti. Průhybovou čáru můžeme vyjádřit třeba Fourierovou řadou a amplitudy jednotlivých harmonických složek považovat za zobecněné souřadnice. Těch bude rovněž nekonečně mnoho, ale jejich množství bude spočetné. Když se spokojíme jenom se složkami nižších řádů, budeme mít zobecněných souřadnic konečný počet. Samozřejmě tím poněkud utrpí přesnost výpočtu. Zde však k oddělení komponent konstrukce nedochází, proto ne-

jde o diskrétní soustavu ve fyzikálním, ale jen v matematickém smyslu slova. Jestliže však takový nosník leží na pražcích, a ty spočívají na pružném podkladu, pak jde fyzikálně o diskrétní soustavu (pražce jsou oddělené konstrukční prvky), kterou můžeme k usnadnění výpočtu přibližně nahradit spojitým pružným podkladem. To ukážeme na druhém příkladu.

Netřeba poznamenat, že úlohy z mechaniky kontinua vedou na soustavy parciálních diferenciálních rovnic, kdežto úlohy o diskrétních modelech s konečným počtem stupňů volnosti se obvykle řeší s použitím matic. Jde-li o pravidelné konstrukční struktury, můžeme hledaná řešení někdy výhodně získat řešením příslušných diferenčních rovnic.

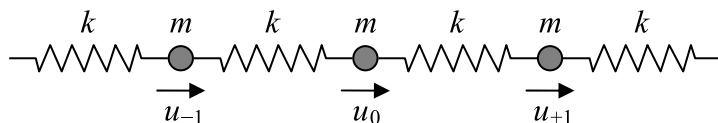
V svém pojednání se omezíme na jednorozměrné struktury. K výpočtu kmitání řetězců vyjdeme z lineárních nebo z linearizovaných rovnic. V takovém případě je výhodné použít komplexní proměnné. Ty lze vektorově znázornit v Gaussově rovině. Například komplexní číslo $z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ lze znázornit vektorem \mathbf{r} o složkách $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Odtud ihned plyne vztah, který budeme později potřebovat:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k / N} = 0, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k p / N} = 0. \quad (28.1)$$

Jednotlivé sčítance jsou totiž jednotkové vektory navzájem pootočené o úhly $2\pi/N$ (resp. jejich p -násobky, p je celé číslo), které tvoří uzavřený polygon (jejich výslednice je nulová). V Gaussově rovině je rovněž ihned zřejmé, že umocnění komplexního čísla znamená nejen změnu délky příslušného vektoru, ale i jeho otočení, neboť $z^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$, a tedy

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (28.2)$$

V této rovnici poznáváme známou Moivreovu poučku. Stačí krátit výrazem r^n nebo volit $r = 1$.



Obr. 28.1

Vlnění v jednorozměrném řetězci modelujícím pružnou tenkou tyč

Na obr. 28.1 je znázorněna soustava hmotných bodů o stejné hmotnosti m , spojených lineárními pružinami s tuhostí (pružinovou konstantou) k . Rozteč bodů je a . Má-li být tato soustava modelem pružné tenké tyče s modulem pružnosti E , průřezem S a hustotou ρ , musí být

$$k = \frac{ES}{a}, \quad m = \rho Sa. \quad (28.3)$$

Budeme předpokládat, že řetězec je nekonečný; posuvy hmotných bodů budou tvořit posloupnost $\dots u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$. Pohybová rovnice pro n -tou hmotu bude

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (28.4)$$

Dosadíme-li (28.3) do (28.4) a přejdeme k limitě $a \rightarrow 0$, dostaneme parciální diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (28.5)$$

platnou pro tenkou pružnou tyč. Je to dobře známá vlnová rovnice, jejíž obecné řešení lze napsat v d'Alembertově tvaru

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (28.6)$$

kde c je rychlost šíření vlny (je-li kladná, postupuje vlna ve směru osy x). Přitom $|c| = \sqrt{E/\rho}$.

Rychlost c může vskutku nabývat kladných i záporných hodnot, definujeme-li ji jako derivaci dx/dt . Obvykle však bývá definována jako absolutní hodnota vektoru rychlosti, tedy $c = |c|$. Pak je ovšem $c \geq 0$, což budeme nadále předpokládat. Funkce f v tom případě popisuje pouze vlnu, která postupuje ve směru rostoucího x .[†] V dalším výkladu se omezíme na

* Čtenář si jistě všiml, že na pravé straně (27.4) je druhá diference posloupnosti u_n .

† Opačně postupující vlnu by popisovala funkce $g(x + ct)$.

tento případ. Funkce f popisuje při pevném t tvar vlny (průběh posuvů u v závislosti na x). Šíří-li se tyčí harmonická vlna, je výhodné napsat řešení rovnice (28.5) pomocí komplexní funkce ve tvaru

$$u(x,t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}, \quad (28.7)$$

kde A je obecně komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je amplitudou harmonické vlny, κ značí vlnové číslo a ω úhlovou frekvenci. Fyzikální význam má reálná část. Pro rychlost c šíření vlny, délku vlny L a periodu T zřejmě platí vztahy

$$c = \frac{\omega}{\kappa}, \quad L = \frac{2\pi}{\kappa}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (28.8)$$

Protože L , T jsou kladné veličiny, jsou kladné i κ , ω , a tedy i c (ve shodě s předpokladem). Dosazením (28.7) do (28.5) se přesvědčíme, že rychlost c šíření vlny je stejná jako v rovnici (28.6). Ostatně harmonická vlna je jenom zvláštním případem obecné vlny. K disperzi nedochází.

Vrátíme se k rovnici (28.4) a budeme studovat, jaký v ní může vzniknout pohyb, který by byl periodický vzhledem k prostorové souřadnici. Budeme požadovat, aby pro každé n a celé číslo N platila podmínka $u_{n+N} = u_n$. Délka vlny tedy bude $L = Na$. Abychom se zbavili diferenčního vztahu na pravé straně rovnice (26.4), zavedeme nové proměnné podle vzorce, převzatého z literatury [ROSEAU (1984)]:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i p k / N} u_k, \quad p = 0, 1, \dots, N-1. \quad (28.9)$$

Rovnici (28.4) vynásobíme činitelem $e^{2\pi i p n / N}$ a sečteme od $n = 0$ do $N-1$. S přihlédnutím k (28.9) dostaneme po úpravě s použitím Eulerových vztahů vzorec

$$\frac{d^2 v_p}{dt^2} + \omega_p^2 v_p = 0, \quad (28.10)$$

kde

$$\omega_p = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{\pi p}{N}\right). \quad (28.11)$$

Rovnici (28.9) můžeme snadno invertovat, neboť

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\pi i p n / N} v_p = \frac{1}{N} \sum_{k,p} e^{2\pi i p(k-n)/N} u_k = u_n. \quad (28.12)$$

K úpravě posledního vztahu jsme využili (28.1). Sčítá-li se podle p , vymizí všechny součty při pevném $k - n \neq 0$. Zbude N stejných sčítanců u_n . Řešením rovnice (28.10) dostaneme

$$v_p = A_p e^{i\omega_p t}, \quad (28.13)$$

kde A_p je komplexní amplituda. Když se vrátíme k původním proměnným podle (28.12), bude

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} A_p \exp i(\omega_p t - 2\pi p n / N). \quad (28.14)$$

Komplexní amplitudu můžeme napsat jako vektor délky $|A_p|$ otočený o fázový úhel α_p , tj.

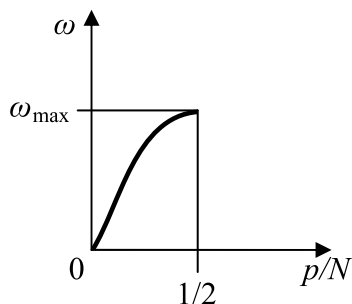
$A_p = |A_p| e^{i\alpha_p}$. Hodnota $\kappa_p = \frac{2\pi p}{Na} = \frac{2\pi p}{L}$ je vlnové číslo. Z výrazu (28.14) má fyzikální význam jen reálná část. S označením $x_n = na$ nakonec dostaneme hledané řešení ve tvaru

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} |A_p| \cos[(\omega_p t - \kappa_p x_n) + \alpha_p]. \quad (28.15)$$

Disperzní vztah, tedy závislost úhlové frekvence na vlnovém čísle, je dán rovnicí (28.11). Tuto závislost stačí znázornit v intervalu $\frac{p}{N} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (viz obr. 28.2). Hodnoty u_n nemohou totiž zobrazit harmonickou složku řádu vyššího než $p = N/2$ (s vlnovou délkou kratší než $2a$). Z rovnice (28.11) je zřejmé, že úhlová frekvence žádné harmonické složky, která se řetězcem šíří, nemůže překročit hodnotu $\omega_{\max} = 2\sqrt{k/m}$.

Poznámka. V literatuře [BREPTA et al. (1985)] najde čtenář poněkud jiné odvození. Zároveň se tam dokazuje, že pokud bychom se pokusili vybudit vlnu vyšší frekvence než ω_{\max} , například tak, že bychom touto vyso-

kou frekvencí budili jednu hmotu řetězce, podařilo by se nám rozkmitat hmoty jen v nejbližším okolí a vzruch by se dále nešířil, vlna by exponenciálně odezněla se vzdáleností od místa buzení.



Obr. 28.2

Vlnění v jednorozměrném řetězci, v němž jsou interaktivní síly odvozeny z potenciálu

Opět budeme posuzovat řetězec vytvořený stejnými hmotami m rozdělenými po přímce s roztečí a . Tentokrát nebudou sériově spojeny lineárními pružinami, ale budou na sebe vzájemně působit silami odvozenými z potenciálu $V = V(\dots \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots)$ tak, že síla působící na n -tou částici je

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial \xi_n}. \text{ Přitom } \xi_n = an + u_n = x_n + u_n, \text{ kde } u_n \text{ je posuv } n\text{-té hmoty}$$

(hmotné částice). Ta má v rovnovážném stavu souřadnici $x_n = na$. Síla působící na tuto částici v rovnovážném stavu musí být nulová (částice se nepohybuje), takže

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \right|_{x_n} = 0. \text{ Potenciál } V \text{ nyní rozvineme v okolí rovnovážné polohy v Taylorovu řadu, v které ponecháme členy pouze do druhého řádu (což stačí pro linearizovanou teorii). Protože na konstantě nezáleží (při derivaci odpadne) a první parciální derivace jsou – jak jsme právě ukázali – nulové, bude nakonec}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \right|_{x_n} u_r u_s . \quad (28.16)$$

Na potenciál musíme klást určité fyzikální požadavky. Například budeme předpokládat, že vzájemné působení dvou hmot nezávisí na ostatních hmotách, takže hodnota potenciálu pro tento pár bude záviset jen na souřadnicích ξ_r, ξ_s hmotných částic tohoto páru. Potenciál bude mít proto tvar

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs}(\xi_r, \xi_s), \quad r \neq s. \quad (28.17)$$

Působení r -té hmoty na s -tou musí být stejné jako s -té hmoty na r -tou. Proto bude platit podmínka souměrnosti

$$V_{rs}(\xi_r, \xi_s) = V_{sr}(\xi_s, \xi_r). \quad (28.18)$$

Pro $r \neq s$ budeme tedy mít

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \right|_{x_n} = \left. \frac{\partial^2 V_{rs}}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \right|_{x_n} = W_{rs}, \quad \text{přičemž } W_{rs} = W_{sr}, \quad (28.19)$$

zatímco

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_r^2} = \sum_s \frac{\partial^2 V_{rs}}{\partial \xi_r^2} = w_r. \quad (28.20)$$

Hmotné částice jsou rozděleny rovnoměrně, takže vzájemné působení žádného páru se nezmění, přičteme-li k indexům r, s stejné celé číslo (kladné nebo záporné). Takže $W_{r+p, s+p} = W_{rs} = W_{r-s, 0} = W_{0, r-s}$. Zavedeme-li pro vzdálenost dvou hmotných částic $(r-s)a$ označení q_a , bude $W_{rs} = W_{q_0} = W_{0q} = W_q$. Rovnici (28.16) můžeme s tímto označením přepsat do tvaru

$$V = \frac{1}{2} \sum_r w_r u_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r \neq s} W_{rs} u_r u_s, \quad W_{rs} = W_q. \quad (28.21)$$

Jsou-li posuvy nulové, je tento potenciál nulový (rovnovážný stav). Změníme-li polohu částic tak, že je z rovnovážného stavu posuneme o reálnou vzdálenost δ , zůstane rovnováha zachována, takže (po zkrácení poslední rovnice činitelem $\delta^2/2$)

$$w_r + \sum_{r \neq s} W_q = 0. \quad (28.22)$$

To ukazuje, že w_r nezávisí na r , takže tento index můžeme vynechat, $w_r = w$. Bude proto

$$w + \sum_{q, q \neq 0} W_q = w + 2 \sum_{q > 0} W_q = 0. \quad (28.23)$$

S využitím vztahu (28.21) můžeme napsat pohybovou rovnici pro n -tou částici ve tvaru

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -w u_n - \sum_{n', n' \neq n} W_{n'-n} u_{n'},$$

anebo s použitím (28.23)

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \sum_{q, q > 0} k_q (u_{n+q} + u_{n-q} - 2u_n), \quad k_q = W_q. \quad (28.24)$$

Pravá strana této rovnice má jednoduchý fyzikální význam. Představuje působení soustavy lineárních pružin spojujících n -tou částici s každou z ostatních částic. Řešení poslední rovnice budeme předpokládat ve tvaru $u_n = A e^{i(\kappa x_n - \omega t)}$, takže $u_{n \pm q} = u_n e^{\pm i \kappa q a}$. Dosazením tohoto výrazu do (28.24) dostaneme po úpravě disperzní vztah

$$m \omega^2 - 4 \sum_{q > 0} k_q \sin^2 \left(\frac{\kappa q a}{2} \right) = 0. \quad (28.25)$$

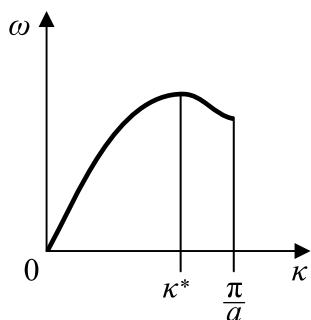
Obdobně jako (28.11) ukazuje tento vztah závislost úhlové frekvence na vlnovém čísle. Je-li $\kappa q a \ll 1$, můžeme funkci sinus aproximovat hodnotou jeho argumentu a vypočítat pro tento případ úhlovou frekvenci ze vzorce

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum_{q > 0} k_q q^2}{m}} \kappa a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \kappa. \quad (28.26)$$

Tento vztah se shoduje s prvním ze vztahů (28.8), jestliže výraz pro modul pružnosti $E = \frac{a \kappa}{S}$ v rovnicích (28.3) změníme na $E = \frac{a}{S} \sum_{q > 0} k_q q^2$. To

znamená, že řetězec může být vhodným modelem homogenní tenké tyče, platí-li uvedená silná nerovnost. Jde-li o řetězec atomů ve mřížce, a to jednodimensionální, pak půjde o velice tenkou tyč, spíše vlákno (whisker). Skutečná jeho struktura (mikrostruktura) je ovšem atomová, a tedy diskrétní, a nikoli spojitá. K zajímavým závěrům dospějeme, omezíme-li se ve vztahu (28.25) na hodnoty $q \leq 2$. To znamená, že každá hmotná částice bude v interakci jen se dvěma nejbližšími sousedními částicemi po každé straně. Potenciál od vzdálenějších částic bude mít zanedbatelný účinek. Po rozepsání dá rovnice (28.25)

$$\omega = 2 \left(\frac{k_1}{m} \sin^2 \frac{\kappa a}{2} + \frac{k_2}{m} \sin^2 \kappa a \right)^{1/2}, \quad \kappa \in \left(0, \frac{\pi}{a} \right). \quad (28.27)$$



Obr. 28.3

Je-li $\frac{k_1}{4k_2} > 1$, je ω monotónně rostoucí funkcí κ a nabývá maxima

$2\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ pro $\kappa = \frac{\pi}{a}$. Je-li však $\frac{k_1}{4k_2} < 1$, roste ω pouze v intervalu $(0, \kappa^*)$ do

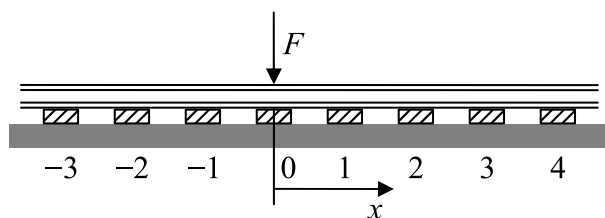
hodnoty $\omega(\kappa^*) = 2 \left(1 + \frac{k_1}{4k_2} \right) \sqrt{\frac{k_2}{m}}$, přičemž $\kappa^* = \frac{1}{a} \arccos \left(-\frac{k_1}{4k_2} \right)$, a pak

zase klesá, jak ukazuje obr. 28.3. To znamená, že se mohou v tomto případě v jistém frekvenčním intervalu řetězcem šířit se stejnou úhlovou frekvencí dvě vlny o různých vlnových číslech.

Omezili jsme se na jednorozměrné řetězce. Vlnění v prostorových soustavách (krystalických mřížkách) je analyzováno například v literatuře [ROSEAU (1984)].

Kolejnice uložena na odpružených pražcích

Vyšetříme deformace přímé velmi dlouhé (nekonečné) kolejnice uložené s pravidelnou roztečí a na pražcích. Pražce jsou uloženy na Winklerově pružném podloží, kolejnice je zatížena nad jediným pražcem osamělou silou $F_0 = F$ (obr. 28.4). Ponecháme stranou možnosti řešit tuto úlohu numerickými postupy, například metodou konečných prvků, protože úloha je jednoduchá a analytické metody vedou rychle k cíli.



Obr. 28.4

Přenáší-li n -tý pražec reakci R_n , posune se do podloží o průhyb δ_n . Tuhost $c = R_n / \delta_n$ nezávisí podle Winklerovy hypotézy na průhybech ostatních pražců. Každý pražec je podle této představy uložen na vlastní pružině, nezávisle na ostatních pružinách. Pro nosník na pružných podpěrách platí pětimomentová rovnice odvozená např. v literatuře [BAŽANT (1944)]*

$$\alpha M_{n-2} + \beta M_{n-1} + \gamma M_n + \beta M_{n+1} + \alpha M_{n+2} = \Delta_n, \quad (28.28)$$

kde n je celé číslo označující podpěru, $\alpha = 6EJ / ca^2$, $\beta = a - 4\alpha$, $\gamma = 4a + 6\alpha$, $\Delta_n = \alpha a (-F_{n-1} + 2F_n - F_{n+1})$. Síly F_n jsou vnější síly, které působí na kolejnici v místě podpěr. Protože je zatížen jen pražec $n = 0$, bude $\Delta_n = 0$ pro $n \neq 0$. Vzhledem k symetrii budeme řešit jen polovinu nosní-

* Jde o zobecnění známé Clapeyronovy třímomentové rovnice.

ku (kolejnice) $x \geq 0$, takže $n \geq 2$, a pak dosadíme $M_{-n} = M_n$. Řešení diferenční rovnice (28.28) je obdobné k řešení diferenciální rovnice, tj. je součtem obecného řešení homogenní rovnice (pro $\Delta_n = 0$), a řešení partikulárního pro nehomogenní (úplnou) rovnici. Pro uvedenou polovinu nosníku ($n \geq 2$) bude diferenční rovnice zřejmě homogenní. Vystačíme proto pouze s řešením homogenní rovnice, které lze předpokládat ve tvaru geometrické řady

$$M_{n(\text{homog})} = \text{konst.} \lambda^n. \quad (28.29)$$

Dosadíme-li (28.29) do (28.28) s hodnotami $\Delta_n = 0$, dostaneme reciprokou rovnici pro kvocient λ

$$\alpha \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) + \beta \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) + \gamma = 0. \quad (28.30)$$

Použijeme substituci $\lambda + 1/\lambda = X$. Obecné výrazy jsou nepřehledné, a tak zvolíme příklad:

$F = 45000 \text{ N}$, $a = 0,53 \text{ m}$, $EJ = 4,1728 \cdot 10^6 \text{ N.m}^2$, $c = 6 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$. Vyjde $\alpha = 14,854 \text{ m}$, $\beta = -58,886 \text{ m}$, $\gamma = 91,244 \text{ m}$. Kořeny rovnice (28.30) budou

$$\lambda_{1,2} = 1,4340 \pm i 0,7483 = r_1 (\cos \varphi \pm i \sin \varphi), \quad \text{kde } r_1 = 1,6176, \\ \varphi = 0,4809 \text{ rad},$$

$$\lambda_{3,4} = 0,5481 \pm i 0,2860 = r_2 (\cos \varphi \pm i \sin \varphi), \quad r_2 = 0,6182.$$

Má-li být řešení reálné, musí být integrační konstanty komplexní. Nakonec vyjde

$$M_n = M_{n(\text{homog})} = r_1^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) + r_2^n (C_3 \cos n\varphi + C_4 \sin n\varphi). \quad (28.31)$$

Protože je $r_1 > 1$, musí být $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.*) Zbývající reálné konstanty C_3 , C_4 určíme tak, aby byly splněny okrajové podmínky v řezu $x = 0$ (fyzikální a geometrická). To je poněkud zdlouhavé. Rychle vede k cíli dife-

* S rostoucím n se podpěrové momenty zmenšují a v nekonečnu vymizí.

renční rovnice, kterou dostaneme, když diskretní model uložení kolejnice nahradíme spojitým, tj. kolejnici budeme považovat za nosník spočívající na spojitém Winklerově pružném podkladu o ekvivalentní tuhosti

$$k = c / a = 6 \cdot 10^6 / 0,53 = 1,132 \cdot 10^7 \text{ N.m}^{-2}.$$

Pro průhyb $w(x)$ bude platit diferenciální rovnice (homogenní, neboť na nosník nepůsobí spojitě vnější zatížení)

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = 0 \quad (28.32)$$

s řešením platným pro pravou polovinu nosníku $x \geq 0$ (integrační konstanty jsou A, B)

$$w(x) = e^{-\vartheta x} (A \cos \vartheta x + B \sin \vartheta x), \text{ kde } \vartheta = \sqrt[4]{k/4EJ}. \quad (28.33)$$

Tato rovnice představuje exponenciálně „tlumenou“ harmonickou vlnu o vlnové délce $L = 2\pi/\vartheta$. Pro dané hodnoty vypočteme $L = 2\pi/0,9075 = 6,924 \text{ m}$.

Také rovnice (28.31) má svou zobecněnou periodu, pokud připustíme i necelé hodnoty n . Vyjde $n_{(\text{per})} = 2\pi/\varphi$ a tomu odpovídá vlnová délka $L^* = n_{(\text{per})}a = 2\pi a/\varphi = 6,925 \text{ m}$. Obě hodnoty se téměř přesně shodují, což znamená, že jsme oprávněni považovat danou kolejnici uloženou na pražcích za nosník na spojitém pružném podkladu a použít rovnice (28.32) místo rovnice (28.28). Dopustíme se tím zanedbatelné chyby.

O společném základu numerických a analytických metod teorie pružnosti

Pružné těleso je mechanickou soustavou s nekonečně mnoha stupni volnosti. Rovnice popisující deformaci a napjatost takového tělesa tvoří základ matematické teorie pružnosti. Obsahují parciální derivace posuvů a složek napětí a jejich přesné řešení je možné jen v jednoduchých případech. Jindy jsme odkázáni na řešení přibližná, při nichž deformaci a napjatost popisujeme zpravidla pomocí pouze konečného počtu nezávislých parametrů. Omezujeme tedy počet stupňů volnosti. Pro neznámé parametry získáme algebraickou soustavu rovnic. Ačkoli metoda řešení algebraických soustav se zásadně liší od analytických metod řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic, existuje přece společný základ obou těchto přístupů, o němž chceme právě pojednat.

Pro stručnost se omezíme na rovinné úlohy. Typickým příkladem idealizované soustavy s konečným počtem stupňů volnosti je prutová soustava, jejíž pruty mohou být namáhány pouze čistým tahem, popř. tlakem. Pruty jsou kloubově spojeny (bez vůlí a bez tření) v uzlových bodech (styčnicích). Posuvy těchto bodů představují neznámé parametry u_1, u_2, \dots, u_n , které sestavíme do vektoru \mathbf{u} v n -rozměrném unitárním prostoru R^n . V uzlových bodech působí rovněž osamělé vnější síly F_1, F_2, \dots, F_n , jejichž vektor \mathbf{f} spadá do téhož prostoru R^n . (Matice a maticové operátory budeme značit velkými písmeny, vektory malými.) Počet prutů je m ; prodloužení prutů sestavíme do vektoru $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^m$ a síly v prutech do vektoru $\boldsymbol{\sigma} \in R^m$ (kladné, jsou-li tahové). Smysl tohoto nezvyklého označení vysvitne z dalšího textu.

K označení skalárního součinu použijeme oblých závorek. Ve srovnání s maticovým zápisem bude tedy např. pro vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} z prostoru R^n platit:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = \sum_{k=1}^n u_k v_k . \quad (29.1)$$

Horním pravým indexem T jsme označili transpozici vektoru.

Poznamenejme, že za prvky vektorového unitárního prostoru lze považovat i funkce. Jsou-li např. na intervalu $a \leq x \leq b$ definovány funkce $f(x)$, $g(x)$, můžeme za jejich skalární součin považovat integrál

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = (g, f). \quad (29.2)$$

To není nic nepřirozeného. Ostatně, stačí rozdělit definiční interval $\langle a, b \rangle$ na n dílků a k numerické integraci použít obdélníkové pravidlo, abychom pro zvolenou délkovou jednotku $\Delta x = (b - a)/n = 1$ dostali místo vztahu (29.2) předchozí vztah (29.1). Ten by ovšem v tomto případě platil přesně jen pro $\lim n = \infty$. Je-li $f(x) = g(x)$, dává (29.2) předpis pro čtverec normy

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (29.3)$$

Funkce f , g musí být tedy integrovatelné s kvadrátem. Pro prutovou soustavu musí platit tyto vztahy:

zákon zachování energie

$$(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (29.4)$$

Na levé straně je dvojnásobek práce vnějších sil, na pravé straně dvojnásobek práce vnitřních sil (dvojnásobek deformační energie).

statické rovnice (rovnice rovnováhy)

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}. \quad (29.5)$$

Lineární algebraický operátor \mathbf{A} zde vyjadřuje skutečnost, že vnější síly jsou dány lineárními funkcemi vnitřních sil (posuvy jsou relativně malé, problém je lineární).

kinematické rovnice (geometrické vztahy)

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (29.6)$$

Posuvy uzlových bodů jednoznačně určují prodloužení prutů (opačné tvrzení obecně neplatí). Vztah (29.6) je linearizovaný, zanedbává se změna směru prutů za deformace prutové soustavy (předpokládají se relativně malé posuvy).

Konstitutivní vztahy (Hookeův zákon)

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}. \quad (29.7)$$

Ukážeme, že operátor \mathbf{A}^* v rovnici (29.6) je adjungovaný k operátoru \mathbf{A} v rovnici (29.5). Z rovnice (29.5) dosadíme na levou stranu rovnice (29.4) a dostaneme

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (29.8)$$

Použili jsme definice adjungovaného operátoru, podle které pro vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} platí $(\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Protože složky vektoru $\boldsymbol{\sigma}$ můžeme nezávisle volit, musí vztah mezi levou a pravou stranou (29.8) platit identicky, takže $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^*\mathbf{u}$. To je však rovnice (29.6). Dosadíme-li naopak (29.6) na pravou stranu (29.4), bude

$$(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}), \quad (29.9)$$

odkud plyne (29.5), neboť \mathbf{u} je libovolné.

Je-li $m = n$, a nejde-li o výjimečný případ, představuje (29.5) lineární soustavu algebraických rovnic s regulární čtvercovou maticí, kterou lze snadno řešit ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$). Je-li však $m > n$, je matice soustavy obdélníková a soustava sama neurčitá; stupeň statické neurčitosti je $m - n$. V tom případě lze řešení rovnice (29.5) napsat symbolicky ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}^*\mathbf{f} + \mathbf{C}^*\mathbf{x}. \quad (29.10)$$

První člen na pravé straně je partikulární řešení (jakékoli), druhý člen představuje obecné řešení zkrácené soustavy rovnic $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$. Vektor \mathbf{x} obsahuje tolik neznámých parametrů, kolik je stupňů statické neurčitosti; jeho rozměr je proto $m - n$. K partikulárnímu řešení tedy připojujeme $m - n$ lineárně nezávislých soustav vlastních pnutí, která mohou ve staticky neurčité prutové soustavě existovat bez působení vnějších sil. Dosadíme (29.10) do (29.5) a dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^*\mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{C}^*\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (29.11)$$

Protože vektory \mathbf{f}, \mathbf{x} jsou libovolné, musí být

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^* = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}\mathbf{C}^* = \mathbf{0}. \quad (29.12), (29.13)$$

Zde \mathbf{I} představuje v maticovém zápisu jednotkovou matici, $\mathbf{0}$ nulovou matici. Dosadíme-li (29.10) do (29.4), vyjde po úpravě

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}) + (\mathbf{x}, \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (29.14)$$

Protože i tento vztah platí identicky, je

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (29.15), (29.16)$$

Vztah (29.16) je podmínkou řešitelnosti soustavy (29.6); je to soustava rovnic kompatibility. Platí-li (29.16), je operátor \mathbf{B} inverzní k operátoru \mathbf{A}^* , což vyplývá ze srovnání (29.6) a (29.15).

Řešíme-li prutovou soustavu *deformační metodou*, eliminujeme vektory $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ dosazením z rovnice (29.6) do (29.7) a pak do (29.5). Pro neznámý vektor \mathbf{u} tak dostaneme vztah

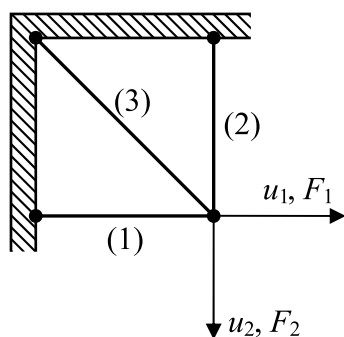
$$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^*\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (29.17)$$

Je-li operátor $\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^*$ regulární, tj. nejde-li o staticky výjimkový případ, lze odtud vektor \mathbf{u} vypočítat. Z rovnic (29.6) a (29.7) pak vypočteme i ostatní neznámé. O stupeň statické neurčitosti se přitom nepotřebujeme starat.

Při aplikaci *silové metody* vycházíme z rovnice kompatibility (29.16), kam dosadíme za $\boldsymbol{\varepsilon}$ z Hookeova zákona (29.7). S použitím (29.10) dostaneme vztah

$$\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{x} = -\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{f}, \quad (29.18)$$

z něhož můžeme vektor \mathbf{x} neznámých parametrů vypočítat. Z rovnice (29.10) pak vyjde $\boldsymbol{\sigma}$, z (29.7) dostaneme $\boldsymbol{\varepsilon}$ a z (29.15) i vektor \mathbf{u} .



Obr. 29.1

Uvedeme jeden ilustrativní příklad. Na obr. 29.1 je zakreslena prutová soustava s jedním stupněm statické neurčitosti, složená ze tří prutů stejného

průřezu S , z téhož materiálu s modulem pružnosti E v tahu či tlaku. Délky prutů jsou $l_1 = l_2 = l, l_3 = l\sqrt{2}$. Zřejmě $m = 3, n = 2$. Označíme ještě $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = c$.

Snadno se přesvědčíme, že v tomto případě je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{D} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Symbol T vyznačuje transpozici matice. Rovnice (29.17) dá řešení

$$u_1 = 0,79289 \frac{F_1 l}{ES} - 0,20711 \frac{F_2 l}{ES},$$

$$u_2 = -0,20711 \frac{F_1 l}{ES} + 0,79289 \frac{F_2 l}{ES}.$$

Partikulární řešení rovnic (29.4) můžeme zvolit $\sigma_1 = F_1, \sigma_2 = F_2, \sigma_3 = 0$. Obecné řešení je jednoparametrické, matice \mathbf{x} má jen jeden prvek x . Za tento parametr zvolíme sílu ve třetím prutu, takže obecné řešení bude $\sigma_1 = -cx, \sigma_2 = -cx, \sigma_3 = x$. Pak

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -c & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Opět $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^T$. Z rovnice (29.18) vyjde

$$x = \frac{c^2}{1 + 2c^3} (F_1 + F_2),$$

takže síly v prutech vyjdou

$$\sigma_1 = 0,79289 F_1 - 0,20711 F_2,$$

$$\sigma_2 = -0,20711 F_1 + 0,79289 F_2,$$

$$\sigma_3 = 0,29289 (F_1 + F_2).$$

Ostatní veličiny můžeme již snadno dopočítat. Obě metody vedou ovšem k témuž výsledku.

Nyní ukážeme, že stejné vztahy (29.4) až (29.18) platí i pro kontinuum, přisoudíme-li symbolům odpovídající významy. Ukážeme to na příkladu rovinné napjatosti. Pro stručnost zavedeme označení

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy} \text{ atd.},$$

$$\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

Rovinné těleso definujeme v oblasti Ω s hranicí Γ . Pak stačí, abychom v oblasti Ω definovali

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T.$$

Výraz

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$$

představuje deformační energii. Dále máme

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y]^T, \quad \mathbf{f} = [f_x \quad f_y]^T$$

Poslední vektor obsahuje vnější objemové síly. Má-li skalární součin

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, d\Omega$$

představovat také práci vnějších sil, bylo by nutné sem zahrnout i práci povrchových sil (pokud nějaké akční povrchové síly na těleso působí). Této komplikaci se můžeme vyhnout, představíme-li si povrchové síly jako objemové, které působí v tenké povrchové vrstvě, jejíž limitní tloušťka bude nakonec nulová.

Pro operátory nyní dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\partial_x & 0 & -\partial_y \\ 0 & -\partial_y & -\partial_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = -\mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{C} = [\partial_{yy} \quad \partial_{xx} \quad -\partial_{xy}], \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^T,$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Zde μ je Poissonovo číslo.

Skutečně, rovnice (29.5) dává po rozepsání diferenciální rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= f_x, \\ -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= f_y. \end{aligned}$$

Z rovnice (29.6) vyjdou Cauchyho vztahy

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_{xy}.$$

Vztah (29.16) dá známou rovnici kompatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Zvolíme-li za \mathbf{x} neznámou funkci $F(x, y)$, pak pro obecnou napjatost v kontinuu bez působení objemových sil dostaneme podle rovnice (29.10) pro $\mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^* \mathbf{x},$$

což po rozepsání dává

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{yy} \\ \partial_{xx} \\ -\partial_{xy} \end{bmatrix} \{F(x, y)\}.$$

Ve funkci $F(x, y)$ poznáváme známou Airyho funkci napětí. Vztah (29.13) je identicky splněn. V rovnici (29.18) máme na pravé straně nulu, neboť objemové síly nepůsobí. Pak $\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$, což po roznásobení a krácení dává

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})^2 F = \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$

(Airyho funkce je bipotenciální). Rovnice (29.11) dává zároveň návod, jak aplikovat Airyho funkci napětí i v případě, že na těleso působí známé objemové síly. K uvedenému obecnému řešení je nutno připojit ještě řešení partikulární, které se bude lišit případ od případu. Obecnou část řešení je třeba určit s přihlédnutím k okrajovým podmínkám. Konečně vztah (29.17) dává po úpravě Lamého rovnice pro posuvy. S označením $G = E/2(1 + \mu)$ vyjde obecně (i pro nenulové objemové síly)

$$\nabla^2 u_x + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{1}{G} f_x,$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} \right) = -\frac{1}{G} f_y.$$

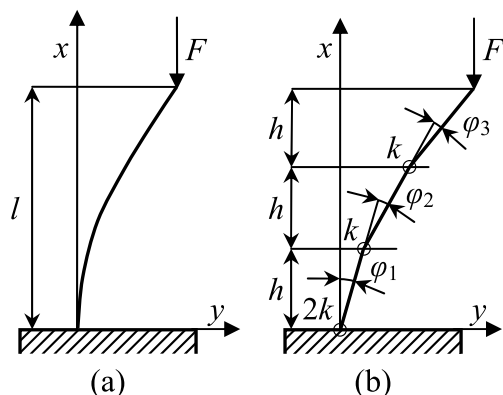
Na příkladu rovinné prutové soustavy a spojitého pružného tělesa ve stavu rovinné napjatosti jsme ukázali souvislost mezi řešením soustavy s konečným počtem stupňů volnosti a řešením kontinua s nekonečně mnoha těmito stupni. Numerické i analytické metody řešení úloh ze statiky pružných těles lze tak posuzovat z jednoho pohledu.

Elastická stabilita z hlediska statiky a dynamiky

Matematický model vzpěry

Tradiční rozdělení mechaniky tuhé fáze na statiku, kinematiku a dynamiku (a také rozlišení mechaniky tuhých a poddajných těles) může vytěšňovat na okraj zájmu některé problémy, které se z tohoto rozdělení vymykají. To ukážeme na jednom příkladu, u něhož je nutné i k řešení statické úlohy použít zákonů dynamiky.

Budeme řešit případ vzpěry na jednom konci vetknuté a na druhém zatížené tlakovou silou konstantní velikosti. Abychom výklad co nejvíce zjednodušili, nahradíme prizmatickou vzpěru několika tuhými pruty spojenými pružnými klouby. Pruty budou mít stejnou délku $h = l/n$ a hmotnost $m = M/n$, kde l je délka a M hmotnost celé vzpěry, n je počet prutů. Na obr. 30.1 bylo zvoleno $n = 3$. Deformace vzpěry na obr. 30.1a je popsána funkcí $v = v(x)$ posuvů střednice, kdežto deformace modelu vzpěry na obr. 30.1b je popsána úhly $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Tyto úhly budeme považovat za zobecněné souřadnice.



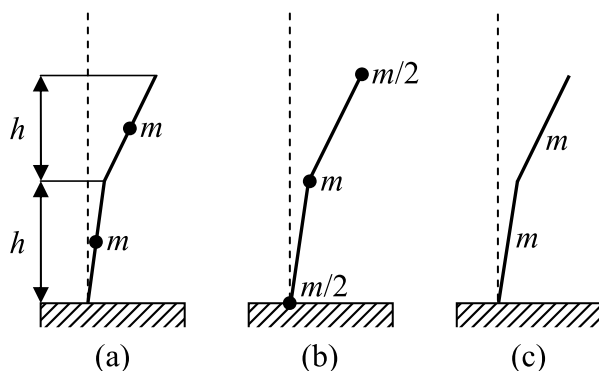
Obr. 30.1

Tento diskretizovaný model je podrobně popsán v práci [OKROUHLÍK, HÖSCHL (1990)]. Tam se také dokazuje, že pružinová konstanta kloubů nemůže být stejná ani u modelu prizmatické vzpěry. Tuhost kloubu v místě vetknutí musí být u této vzpěry $2k$, kdežto u všech ostatních kloubů je k . Přitom $k = EJ / h$, kde EJ je ohybová tuhost vzpěry při rovinném ohybu. Ukáže se, že pohybová rovnice diskrétního modelu má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}, \quad (30.1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, která závisí na deformaci popsané vektorem $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$, a \mathbf{K} je diagonální matice tuhosti. Vektor \mathbf{f} představuje buzení.

Protože nám jde pouze o kvalitativní rozbor, zjednodušíme tento model ještě více. Zvolíme $n = 2$ a omezíme se na malé úhly φ_1, φ_2 . Tím se bude rovnice (30.1) linearizovat.



Obr. 30.2

Kromě toho zvolíme tři různé způsoby zahrnutí hmotnosti do výpočtu podle obr. 30.2a až 30.2c. Podle obr. 30.2a soustředíme hmotnost m do středu každého prutu. Do výpočtu tedy nebude zahrnuta rotační setrvačnost prutů. Podle obr. 30.2b rozdělíme hmotnost každého prutu na dvě poloviny a připojíme je v koncových bodech prutu. Moment setrvačnosti jednoho prutu k ose procházející jeho těžištěm tedy bude $2(m/2)(h/2)^2 = mh^2/4$. U modelu podle obr. 30.2c ponecháme hmotnost prutů spojitě rozdělenou,

takže moment setrvačnosti jednoho prutu k jeho těžišti bude $mh^2/12$. Každý z těchto modelů bude tedy odpovídat jinému rozdělení hmotnosti. Rozdíly mezi těmito případy by se měly s rostoucím počtem n elementárních prutů zmenšovat. My však zůstaneme u hodnoty $n = 2$.

Deformační energie bude pokaždé stejná, a to

$$U = \frac{1}{2}(2k)\varphi_1^2 + \frac{1}{2}k\varphi_2^2 = \frac{1}{2}k(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \quad (30.2)$$

Je to kvadratická forma utvořená s maticí tuhosti, takže prvky této matice můžeme vypočítat podle vzorce

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}. \quad (30.3)$$

Vyjde

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30.4)$$

V případě podle obr. 30.2a bude kinetická energie

$$T_a = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{3h}{2}\dot{\varphi}_1 + \frac{h}{2}\dot{\varphi}_2\right)^2 = \frac{1}{8}mh^2(10\dot{\varphi}_1^2 + 6\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2). \quad (30.5)$$

Odtud můžeme určit prvky matice hmotnosti

$$m_{ij}^{(a)} = \frac{\partial^2 T_a}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j}. \quad (30.6)$$

Vyjde

$$\mathbf{M}_a = \frac{mh^2}{4} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30.7)$$

Pro případ podle obr. 30.2b budeme mít

$$T_b = \frac{1}{2}mh^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(2h\dot{\varphi}_1 + h\dot{\varphi}_2)^2 = \frac{mh^2}{4}(6\dot{\varphi}_1^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad (30.8)$$

takže

$$\mathbf{M}_b = \frac{mh^2}{2} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30.9)$$

Konečně pro spojitě rozdělenou hmotnost podle obr. 30.2c vyjde kinetická energie

$$T_c = T_a + \frac{1}{24} mh^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{24} mh^2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 = \frac{mh^2}{6} (8\dot{\varphi}_1^2 + 5\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) \quad (28.10)$$

a matice hmotnosti

$$\mathbf{M}_c = \frac{mh^2}{6} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}. \quad (30.11)$$

Stabilita kmitající vzpěry s konzervativním zatížením

Zachovává-li síla F při zatížení nejen velikost, ale i směr (obr. 30.1a, b), je soustava konzervativní. Zobecněné síly f_1, f_2 sdružené k souřadnicím φ_1, φ_2 vypočteme porovnáním koeficientů v rovnici pro virtuální práci

$$f_1 \delta \varphi_1 + f_2 \delta \varphi_2 = Fh(2\varphi_1 + \varphi_2) \delta \varphi_1 + Fh(\varphi_1 + \varphi_2) \delta \varphi_2. \quad (30.12)$$

Vyjde

$$f_1 = 2Fh\varphi_1 + Fh\varphi_2,$$

$$f_2 = Fh\varphi_1 + Fh\varphi_2.$$

S použitím těchto výrazů dostaneme

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2(k - Fh) & -Fh \\ -Fh & (k - Fh) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^* \boldsymbol{\varphi} \quad (30.13)$$

Souměrnost matice \mathbf{K}^* svědčí o tom, že síly \mathbf{f} jsou konzervativní, takže je lze získat derivacemi potenciálu

$$\bar{U} = Fh \left(\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi_2^2 \right). \quad (30.14)$$

Z výsledného potenciálu

$$U^* = U - \bar{U} \quad (30.15)$$

bychom derivacemi podle vzoru (30.3) dostali přímo modifikovanou matici tuhosti \mathbf{K}^* [viz (30.13)].

Rovnice (30.1) bude mít s modifikovanou maticí tuhosti tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}. \quad (30.16)$$

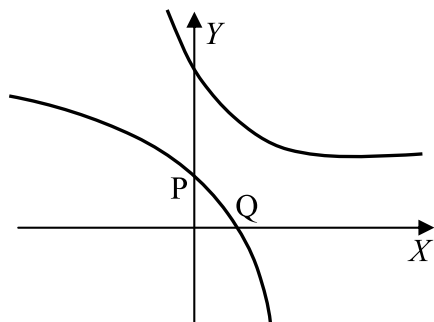
Harmonické kmitání bude popsáno vztahem

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 e^{i\omega t} \quad (30.17)$$

a vlastní frekvence systému vyjde z podmínky existence netriviálního řešení ve tvaru

$$|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}^*| = 0. \quad (30.18)$$

Za matici \mathbf{M} dosadíme některý z výrazů (30.7), (30.9) a (30.11). Budeme počítat jen první (nejmenší) úhlovou frekvenci ω_1 volného netlumeného kmitání, neboť při malém počtu elementárních prutů v matematickém modelu je výpočet vlastních kmitů vyšších řádů problematický.



Obr. 30.3

Rovnice (30.18) je implicitní rovnicí hyperboly $f(X, Y) = 0$ v bezrozměrových proměnných (obr. 30.3)

$$X = \omega^2 mh^2 / k, \quad Y = Fh / k. \quad (30.19)$$

Je zřejmé, že tahová síla F (tj. $Y < 0$) způsobuje vzrůst frekvence vlastních kmitů, kdežto tlaková síla ($Y > 0$) způsobuje pokles této frekvence.

Je-li $Y = 0$, dává pořadnice bodu Q na obr. 30.3 první úhlovou frekvenci ω_1 volného kmitání nezatížené vzpěry. Pro modely podle obr. 30.1a a 30.2a, b, c dostaneme výsledky shrnuté do tab. 1.

Model obr.	1a	2a	2b	2c
$\omega_1 l \sqrt{\frac{Ml}{EJ}}$	3,516	3,289	2,928	3,156
$F_{krit.} l^2 / EJ$	2,467	2,343	2,343	2,343

Tab. 1

Řešení pro model podle obr. 30.1a je převzato z literatury [KOŽEŠNÍK (1979)], kde najdeme i různá kritéria pro posouzení stability pohybu. Nebudeme zabíhat do podrobností, uvedeme jen, že nosník přestane kmitat, když $X = 0$ (bod P na obr. 30.3). Tehdy bude $Y \doteq 0,5858$ (u všech modelů podle obr. 30.2); tomu přísluší síla $F_{krit} \doteq 2,343 EJ / l^2$ uvedená rovněž v tab. 1. Nazvali jsme ji kritickou, protože jde o sílu na hranici stability pohybu. Bude-li totiž $X < 0$, vyjde úhlová frekvence imaginární a místo řešení (30.17) budeme mít vztah

$$\varphi = \varphi_0 e^{\lambda t} \quad (30.20)$$

popisující při $\lambda > 0$ exponenciálně rostoucí výchylky. Hodnota kritické síly platná pro model podle obr. 30.1a je známá Eulerova síla.

Dosadíme-li do rovnice (30.18) $\omega^2 = 0$, dostaneme podmínku

$$|\mathbf{K}^*| = 0 \quad (30.21)$$

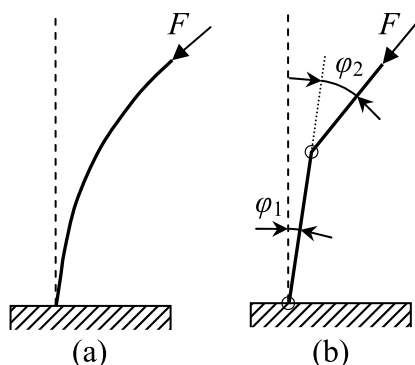
pro výpočet kritické síly na mezi elastické stability při statickém zatížení; je totožná s kritickou silou na mezi stability kmitavého pohybu. Statické a dynamické kritérium stability vedou tedy ke stejné podmínce (30.21) pro výpočet kritické síly.

Poznámka. Podle dynamického kritéria jde o kritickou sílu oddělující oblast periodického (harmonického) kmitání od aperiodického pohybu

s exponenciálně rostoucí výchylkou. Podle statického kritéria jde o sílu, při které nastává bifurkace rovnovážného stavu.

Stabilita vzpěry s nekonzervativním zatížením

Zcela jiná situace nastane, bude-li síla F sice konstantní ve své velikosti, ale bude měnit směr tak, aby sledovala pohyb konce vzpěry (obr. 30.4). Ihned je zřejmé, že půjde o dynamickou úlohu, protože při statickém působení síly F vzniká podle smyslu ohybového momentu v pravém vnějším vláknu prutu tah, zatímco průhyb působí v témže vláknu tlak, což je rozpor.



Obr. 30.4

Místo podmínky (30.12) pro virtuální práci zatěžující síly budeme nyní mít pro model podle obr. 30.4b rovnici

$$\delta A = f_1 \delta \varphi_1 + f_2 \delta \varphi_2 = -Fh\varphi_2 \delta \varphi_1, \quad (30.22)$$

takže

$$f_1 = -Fh\varphi_2, \quad f_2 = 0.$$

Tyto síly nemají potenciál; nepodaří se nám totiž najít funkci, jejíž partiální derivace by se rovnaly těmto silám. Jsou nekonzervativní, neboť např. z výchozí polohy $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ se můžeme do konečné polohy φ_{1k} , φ_{2k} dostat buď tak, že nejprve změním úhel φ_1 a pak úhel φ_2 (a nevykonáme přitom žádnou práci), nebo nejdříve změním úhel φ_2 a pak

teprve φ_1 (přitom vykonáme práci $A = -Fh\varphi_{2k}\varphi_{1k}$). Výsledná práce závisí tedy na integrační cestě, takže (30.22) není diferencíálem žádné skalární funkce $\bar{U}(\varphi_1, \varphi_2)$.

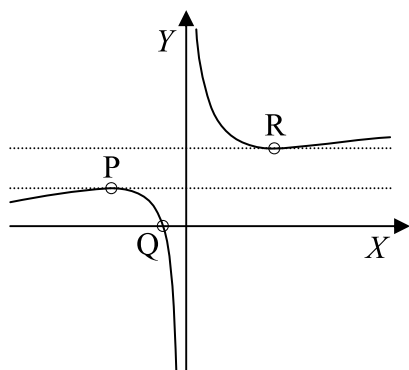
Matice \mathbf{K}^* nyní vyjde nesymetrická:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 2k & Fh \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (30.23)$$

Podmínka pro sílu F na mezi statické stability (30.21) nemá řešení, neboť pro jakékoli F platí, že

$$|\mathbf{K}^*| = 2k^2 > 0, \quad (30.24)$$

tj. systém je staticky vždy stabilní. To je jistě překvapivé zjištění.



Obr. 30.5

Zcela jiná situace nastane, budeme-li vycházet z kritéria pro dynamickou stabilitu. Řešení rovnice (30.16) budeme předpokládat ve tvaru (30.20). Vyjde-li λ ryze imaginární, je kmitání harmonické a stabilní. To znamená, že λ^2 musí být záporné. Každý jiný případ znamená, že pohyb je nestabilní.

Charakteristická rovnice

$$|\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (30.25)$$

představuje opět hyperbolu $f(X, Y) = 0$ v bezrozměrových souřadnicích

$$X = \frac{\lambda^2 mh^2}{k}, \quad Y = \frac{Fh}{k}, \quad (30.26)$$

ta má však průběh znázorněný schematicky na obr. 30.5. Nestabilita nastává pro $Y > Y_p$, stabilní pohyb existuje jen pro $Y < Y_p$. Podmínce $Y = Y_p$ na hranici stability vyhovíme, najdeme-li kořeny X_p, Y_p , popř. X_R, Y_R , splňující kromě rovnice $f(X, Y) = 0$ také podmínku $dY/dX = 0$, a vybereme $Y_p < Y_R$. Výsledky řešení jsou shrnuty v tab. 2.

Model obr.	2a	2b	2c
$\omega_p l \sqrt{\frac{Ml}{EJ}}$	9,514	5,657	7,163
$F_{\text{krit.}} l^2 / EJ$	12,229	8,0	10,013

Tab. 2

Nad hranicí stability dostáváme pro $Y_p < Y < Y_R$ komplexní sdružené kořeny X , jimž přísluší i komplexní hodnoty λ ; jedna z těchto hodnot má pozitivní reálnou část. Tomu odpovídá kmitavý pohyb s exponenciálně rostoucí amplitudou. Při $Y > Y_R$ je pohyb aperiodický s exponenciálně rostoucí výchylkou. V podrobnostech odkazujeme na literaturu [ROSEAU (1984)].

Závěr

U soustavy zatížené silou, která má konstantní velikost i směr, vedou obě kritéria stability – statické a dynamické – k téže velikosti kritické tlakové síly. U soustavy zatížené nekonzervativní silou, která má konstantní velikost, avšak mění směr spolu se sklonem konce prutu, dochází ke ztrátě stability jen za působení setrvačných sil, které nelze zanedbat. Kritickou sílu, ačkoli má konstantní velikost, můžeme vypočítat pouze řešením dynamické úlohy; statické kritérium pro ztrátu stability nevede k cíli. Důsledkem této skutečnosti je, že velikost kritické síly závisí v tomto případě na rozložení hmotnosti, jak je zřejmé ze srovnání modelů v tab. 2. Kritická síla, která

sleduje směr konce vzpěry, je několikrát větší než v případě, kdy síla zachovává směr.

Vnucuje se otázka, zda případ nekonzervativně zatíženého prutu má nějaký praktický význam. Příkladem významné aplikace může být pružná hadice protékaná tekutinou [PAIDOUSSIS (1970)]. Při nadkritické rychlosti tekutiny se konec hadice s vytékající tekutinou rozkmitá, může se pak stát, že např. hasiči konec hadice neudrží.

Lagrangeova funkce v newtonské a relativistické mechanice

*Tomu, komu by se podařilo jedním pohledem
zachytit celý svět, by se veškeré stvořeníjevilo
jako jediná pravda a nutnost.*

D'Alembert, L'Encyclopédie (1751)

Nic nevystihuje lépe ideu, která byla hnací silou badatelského úsilí Alberta Einsteina (1879–1955), než uvedený citát ze staré d'Alembertovy *Encyklopedie*. Einsteinova teorie relativity ovlivnila moderní fyziku více než kterákoli jiná teorie od dob Newtonových. Byla též zneužita některými filozofy a demagogy a stala se předmětem mnoha sporů.* Nakonec se stala nejlépe experimentálně ověřenou teorií v historii fyziky, o níž pochyboval už jen sám Einstein.

V tomto příspěvku připomeneme (bez nároku na úplnost) jeho základní životopisné údaje a také postuláty jeho teorie, a pak se zaměříme na jeden příklad rozdílného chápání zákonů dynamiky v klasické analytické mechanice a v mechanice relativistické. Za mezníky v Einsteinově tvůrčí práci lze považovat tyto letopočty:

- 1905 Objev zákona fotoelektrického efektu a první práce o speciální teorii relativity
- 1908 Habilitace na universitě v Bernu, přednáška o teorii záření před třemi posluchači
- 1909 Nastupuje jako profesor na universitě v Curychu
- 1911 Povolán na německou universitu v Praze
- 1912 Vrací se do Curychu
- 1914 Ustanoven profesorem na universitě v Berlíně
- 1916 Ukončuje práce na obecné teorii relativity

* Například němečtí národní socialisté považovali tuto teorii za židovský pokus rozvrátit árijskou víru v absolutno.

- 1921 Nobelova cena za objev zákona fotoelektrického efektu
- 1933 Zbaven německého občanství, je konfiskován jeho majetek a vypsána odměna za jeho dopadení. Usazuje se v USA jako emeritní profesor v Princetonu
- 1939 Píše presidentu Rooseveltovi o německé snaze vyrobit atomovou bombu
- 1946 Stává se presidentem Emergency Committee of Atomic Scientists

Všimněme si, že komise pro udělování Nobelových cen neměla odvalu přiznat Einsteinovi cenu za objev, který ho nejvíce proslavil, totiž za teorii relativity.

Když M. Faraday (1791–1867) objevil siločáry, ihned se vnucovala otázka, co se s nimi děje, když se těleso, které je vyvolalo, dá do pohybu. H. Hertz (1857–1894), který zkoumal šíření elektromagnetických vln, se domníval, že se siločáry pohybují s tělesem, jako by byly tuhé a s ním spjaté. Ale A. H. L. Fizeau (1819–1896) konal pokusy se světlem, měřil rychlost jeho šíření v proudu tekoucí vody a naměřil cosi jiného. H. A. Lorentz (1853–1928) se pokusil nesouhlas vysvětlit pomocí nepohyblivého „éteru“, což přivedlo jiné badatele k myšlence, že proměřením rychlosti šíření světla ve dvou k sobě kolmých směrech by bylo možno zjistit postupný pohyb Země ve vesmíru. To však neprokázal proslavený Michelsonův-Morlayův pokus (roku 1887). Neprokázalo se to ani při četných opakovaných, pečlivě připravených pokusech. Fyzika se tak ocitla v úzkých. H. A. Lorentz i H. Poincaré byli přesvědčeni, že platná teorie musí vzít tuto skutečnost v úvahu. Sami ji však formulovat nedokázali. Teprve Einstein problém jaksi obrátil: z neúspěchu těchto pokusů vytvořil hypotézu o ekvivalenci všech inerciálních referenčních (vztažných) systémů, které se vzájemně rovnoměrně pohybují, a postavil ji jako první postulát do čela své nové teorie. Zároveň přidal i druhý postulát o rychlosti šíření světla (ve vakuu) v těchto systémech. Tvrzení, že se Michelsonův-Morlayův pokus nezdařil, mění tyto postuláty v tom smyslu, že se takový pokus zdařit nemůže. Máme tedy dva postuláty jakožto nepochybné hypotézy, které není třeba dokazovat:

1. *Všechny referenční systémy, které se pohybují vzájemně rovnoměrně, jsou rovnocenné*

2. *V každém takovém systému se světlo šíří libovolným směrem se stejnou rychlostí c*

Tyto postuláty si však podle „zdravého rozumu“ odporují, nemohou platit zároveň. Einstein tento nesoulad odstranil tím, že se vzdal představy o „absolutním čase“. Nalezl vztah, který musí platit mezi prostorovými a časovými měřeními, jestliže je konají dva pozorovatelé, jejichž laboratoře se vzájemně rovnoměrně pohybují. Tyto rovnice ukázaly, že čas t už není absolutní veličinou, ale že musí být přidán k prostorovým souřadnicím. Z veličiny invariantní se stal veličinou kovariantní, zatímco rychlost světla se stala z veličiny kovariantní naopak veličinou invariantní. Galileova transformace musela být nahrazena Lorentzovou transformací.

Důsledky nové teorie byly převratné. Byly v úplném souladu se všemi známými jevy prvního i druhého řádu, které dosud vzdorovaly uspokojivému vysvětlení. Ve svých důsledcích přivedly Einsteina mimo jiné k objevu souvislosti mezi hmotností a energií vyjádřené slavnou rovnicí $E = mc^2$. Mnoho fyziků se však domnívalo, že Einsteinovy úvahy jsou jenom matematickými hříčkami bez fyzikálního odůvodnění. Tyto námitky pomohl vyvrátit jiný objev, totiž objev geometrického významu obou Einsteinových postulátů. H. Minkowski si všiml (v letech 1908–1909), že Einsteinovy postuláty jsou vyjádřením geometrické struktury čtyřrozměrného časoprostoru, v němž čas zaujímá rovnocenné postavení s prostorovými souřadnicemi. Všechny transformační vztahy speciální teorie relativity mají totiž tu vlastnost, že ponechávají neměnný výraz $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Zvolíme-li například souřadnice

$$x_1 = ix, \quad x_2 = iy, \quad x_3 = iz, \quad x_4 = ct, \quad (31.1)$$

bude součet čtverců těchto souřadnic invariantní. Vynásobením času t rychlostí světla c jsme dosáhli rozměrové homogenity (všechny souřadnice jsou délkové, z toho tři imaginární). Všechny transformační vztahy, které ponechávají invariantním výraz

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \quad (31.2)$$

se nazývají *Lorentzova transformace*. Speciálně jedna z nich platila pro Einsteinovu teorii. To tedy znamená, že ve speciální teorii relativity tvoří entita souřadnic (31.1) geometrickou strukturu Minkowského časoprostoru. V něm je pohyb hmotné částice jako fyzikální děj zobrazen pohybem bodu na dráze, jakési světočáře, jejíž infinitesimální element má délku ds danou rovnicí

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (31.3)$$

Jde tedy o euklidovský čtyřrozměrný prostor.*

Jak jsme již uvedli, Einsteinova teorie byla jednou z nejlépe experimentálně ověřených fyzikálních teorií. Badatelé, kteří začali tuto teorii studovat za tím účelem, aby ji vyvrátili, se stali jejími zastánci, a poslední, kdo o ní ještě pochyboval, byl Einstein. Nebyl spokojen s tím, že se jeho teorie omezovala na referenční systémy, které se pohybují vzájemně rovnoměrně. Hledal způsob, jak teorii zobecnit i pro zrychlené relativní pohyby. Zrychlení svého referenčního systému totiž může pozorovatel experimentálně prokázat. Bylo třeba se ptát, jak by se mohl princip relativity uplatnit i v tomto případě. K odpovědi Einsteinovi dopomohl myšlený pokus s výtahem. Představme si výtah a v něm fyzikální laboratoř s pozorovatelem. Výtah buď stojí, nebo se pohybuje vzhůru se zrychlením g . Pozorovatel uvnitř neví, která alternativa nastává, protože s vnějším světem nemá žádné spojení. Pozoruje však, že hmota m je přitahována k podlaze silou mg . Jako fyzik má pro to dvě možná vysvětlení. Buď výtah stojí a na hmotu působí tíhové zrychlení g , nebo se výtah pohybuje vzhůru se zrychlením g , zatímco žádné gravitační zrychlení neexistuje. Pro našeho pozorovatele jsou obě tyto možnosti ekvivalentní. Ptát se, která z obou možností je pravděpodobnější, znamená ptát se po absolutním prostoru s univerzální vztahnou soustavou, která by měla přednost před ostatními. To by odporovalo obecnému principu relativity. Proto Einstein říká, že ptát se po pravděpodobnosti nemá smy-

* V mnoha monografiích se prostorové souřadnice ponechávají jako reálné a imaginární jednotka se přidává k časové souřadnici. Potom však vyjde dráha s imaginární.

sl, protože přednost jedné hypotézy před druhou nelze nikdy dokázat. Proto nemá smysl, aby se pozorovatel uvnitř laboratoře pokoušel přísuzovat oběma možnostem nějakou rozdílnou pravděpodobnost. Obě alternativy jsou pro něho rovnocenné. Tak se ukázala ekvivalence mezi účinky zrychleného pohybu a gravitačního pole. A do čela obecné teorie relativity byl postaven *princip obecné rovnocennosti všech referenčních systémů*. Záhy se ukázalo, že silné gravitační pole velkých nebeských těles má vliv na rychlost světla a poněkud zakřivuje paprsky probíhající v jejich těsné blízkosti. Bylo tedy třeba přibrat do geometrické entity světa kromě prostoru a času také hmotu. Euklidovská geometrie časoprostoru byla nahrazena geometrií riemannovskou. Tím se ovšem stal matematický aparát obecné teorie relativity natolik složitý, že se jí nebudeme v tomto příspěvku zabývat.

V klasické analytické mechanice má důležitou úlohu Lagrangeova funkce $L = T - V$, kde T je kinetická energie a V potenciální energie soustavy popsané zobecněnými souřadnicemi. Tato funkce vstupuje do Hamiltonova variačního principu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (31.4)$$

Takto definovaná Lagrangeova funkce nespĺňuje podmínky invariance při Lorentzově transformaci, a musí být proto v relativistické mechanice nahrazena jinou. Soustředme pozornost nejprve na první člen akčního integrálu, který obsahuje kinetickou energii, tedy na výraz $\int_{t_1}^{t_2} T dt$. Poznamenejme, že v čtyřrozměrném časoprostoru není veličina T skalárem. Už jenom proto musíme tento integrál nahradit jiným.

V relativistické mechanice je pohyb hmotné částice znázorněn pohybem bodu na světočáře. Proto je logické považovat za rychlost tohoto pohybu vektor spadající do tečny ke světočáře, jejíž jednotkový vektor má složky

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}, \quad \frac{dx_4}{ds}.$$

Podle (31.2) resp. (31.1) a (31.3) vyjde pro element dráhy

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (31.5)$$

Poněvadž rychlost v známá z úloh klasické mechaniky bývá mnohem menší než rychlost šíření světla, můžeme poslední výraz upravit. Vyjde

$$ds = c\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) dt. \quad (31.6)$$

To tedy znamená, že integrál

$$- \int_{t=t_1}^{t=t_2} mc ds = - \int_{t=t_1}^{t=t_2} mc^2 dt + \int_{t=t_1}^{t=t_2} T dt, \quad (31.7)$$

který je při Lorentzově transformaci invariantní, může integrál ve variaci (31.4) nahradit, protože při variaci je první člen na pravé straně (31.7) konstantní a jeho variace vymizí. První část Lagrangeovy funkce tedy dostaneme z porovnání integrálů (31.4) a (31.7) ve tvaru

$$L = -cm \frac{ds}{dt} = -c^2 m \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)}. \quad (31.8)$$

Zde jsme použili zobecněné souřadnice q_1, q_2, q_3 ve významu x, y, z . Rovnice (31.8) platí pro případ, že potenciální energie je nulová (resp. konstantní).

Poznámka. Výraz (31.8) je pravým skalárem, neboť jej lze napsat ve tvaru

$$L = -cm \sqrt{\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i^2}. \quad (31.8a)$$

Z analytické mechaniky je známo (viz kap. 9), že zákon zachování energie lze vyjádřit ve tvaru (v tomto zvláštním případě při třech stupních volnosti)

$$E = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L, \quad (31.9)$$

který je obecnější než rovnice $E = T + V$. Platí pro skleronomní soustavu při jakémkoli tvaru Lagrangeovy funkce. Přitom

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (31.10)$$

značí (zobecněnou) hybnost. Když do rovnice (31.9) dosadíme z (31.8) a (31.10), dostaneme

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (31.11)$$

Protože v^2/c^2 je obvykle velmi malá veličina ve srovnání s 1, můžeme (31.11) upravit:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + T. \quad (31.12)$$

To je slavná Einsteinova rovnice, podle které má těleso o hmotnosti m klidovou energii (při nulové rychlosti v) rovnou mc^2 . To znamená, že těleso o hmotnosti 1 gram v sobě skrývá energii asi 25 miliónů kWh.

Nyní se zaměříme na druhý člen v integrálu (31.4), totiž na integrál $-\int_{t_1}^{t_2} V dt$. Potřebujeme, aby to byla funkce všech čtyř proměnných souřadnic Minkowského časoprostoru, invariantní při Lorentzově transformaci. Bude tedy $V = V(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Invariance dosáhneme tak, že místo diferenciálu dt použijeme tzv. *vlastní* nebo *charakteristický čas* $d\tau$ definovaný podílem $d\tau = ds/c$. Je to čas hodin spjatých s pohybem hmotné částice, jak poznáváme z rovnice (31.5) po dosazení $v = 0$. Místo akčního integrálu

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (31.13)$$

tedy budeme mít

$$A = -\int_{t_1}^{t_2} \left(mc + \frac{V}{c} \right) ds = -c \int_{t_1}^{t_2} \left(m + \frac{V}{c^2} \right) ds. \quad (31.14)$$

To znamená, že přítomnost potenciální energie má stejný účinek jako zvětšení hmotnosti částice o přírůstek V/c^2 . Natáhneme-li pružinu u hodin, bude to stejné, jako kdybychom o nepatrnou hodnotu zvětšili její hmotnost.

A naopak, zmenšení hmotnosti částice uvolní příslušnou potenciální energii. Vzhledem k velikosti hodnoty c^2 nemají tyto změny praktický význam, pokud nejde o procesy jaderného rozpadu, kde je ve hře obrovské množství takových částic.

Uvedeme příklad. Vodík se může přeměnit v hélium, a to za velmi vysokých teplot a za přítomnosti neutronů (a uhlíku). Jádro nového hélia vzniká kombinací dvou protonů a dvou neutronů. Avšak hmotnost nově vzniklého jádra hélia je o necelé 1 % menší než součet hmotností jader na vstupu (dvou protonů a dvou neutronů). Tomuto „ztracenému“ rozdílu hmotností odpovídá uvolněné teplo (podle vztahu $E = mc^2$), což je zničující energie vodíkové bomby.*

Teorie relativity je obdivuhodným výkonem lidského ducha, který fyzikům umožnil porozumět dosud neobjasněným jevům makro- i mikrosvěta. Je to jeden z důležitých milníků na cestě poznání, která je nekonečná. A jen na lidech záleží, povede-li tato cesta v Élysion nebo do Tartaru.

* Znalcům jaderné fyziky se omlouváme za zjednodušený popis tohoto procesu.

Detektivka s dobrým koncem

V naší veřejnosti stále ještě přežívá představa, že pražský koncern ČKD byl opěrnou baštou Komunistické strany Československa. To je však pouhý mýtus. Je přece známo, že milicionáři, pravidelně a vždy znovu zobrazování od února 1948 na plakátech vylepovaných při výročích „Vítězného února“, pocházeli z michelské plynárny. Ve skutečnosti byly uvnitř výrobních závodů ČKD – nazvaných tehdy ČKD Dukla, ČKD Sokolovo a ČKD Stalingrad – na svou dobu poměrně liberální politické poměry. Muselo se totiž především vyrábět, takže na nějaké šarvátky tam nebylo místo. To ovšem neznamená, že by tam „rodná strana“ neměla vše pevně v rukou. Obsadila důležitá místa svými lidmi, ale neodvážila se pohrdat zkušenými odborníky a nemohla ani příliš sekýrovat dělnickou třídu. Jedním z prokuristů ČKD Sokolovo byl například ruský emigrant Ing. Surin*, který po první světové válce uprchl před bolševiky. Pracoval v tomto libeňském závodě i za druhé světové války. Tehdejší německé vedení ho chtělo vyznamenat Svatováclavskou orlicí, ale to se mu nepodařilo. Inženýr Surin tehdy omdlel a marodil tak dlouho, až toto nebezpečí i válka pominuly. A komunistická uvědomělost dělnické třídy byla tím nižší, čím těžší práci dělníci vykonávali. Například dělníci v kovárně projevovali své vcelku zdravé názory zcela bez zábran, o čemž se mohl přesvědčit i Antonín Zápotocký, když jako čerstvě zvolený prezident navštívil závod ČKD Sokolovo po měnové reformě roku 1953. Ostatně ani soudruh Štěpán o 36 let později nedokázal odhadnout v témže závodě mentalitu „pracujícího lidu“ správně. A to měl jistě k dispozici „svodky“ výzvědných a jiných tajných služeb.

Už v padesátých letech minulého století došly stranické orgány k poznatku, že politické uvědomění pracujícího lidu upadá, což se projevuje i v odborovém hnutí. Příspěvky se tenkrát automaticky strhávaly každému ze

* Zdráhám se psát podle současných pravidel „ing.“, neboť to považuji za degradaci kdysi významného akademického titulu, jehož označení se psalo vždy s velkým písmenem. Tento úzus, zakotvený v dosud platných vysvědčeních o druhých státních zkouškách, zrušili komunisté, když nařídili, aby se psalo „inž.“. Ostatní tituly takto postiženy kupodivu nebyly, například přírodovědec si nepíše před jméno „rmdr.“

mzdy nebo z platu, a pak ovšem skoro nikdo nebral své členství v Revolučním odborovém hnutí (ROH) vážně. Proto se rozhodlo, že se situace musí změnit. Jakmile se prý budou tyto členské příspěvky platit individuálně, ihned se ukáže, kdo je uvědomělý, kdo to myslí s odbory doopravdy a kdo ne. Jenže takový odhad byl chybný – dělníci v ČKD prostě přestávali příspěvky platit. Protože nebylo přijatelné vylučovat dělnickou třídu z odborů a ponechávat tam jen ustrašené úřednictvo, bylo třeba všem ukázat, že odbory dokážou svým členům poskytnout víc než jen laciné rekreace. V ČKD Sokolovo byla svolána celozávodní schůze ROH, na které se rozdávalo pohoštění (párky a pivo), na improvizovaném pódiu tančily baletky a posléze vystoupil „král komiků“ Vlasta Burian, teprve nedávno propuštěný z vězení. Byla to lidská troska. Navzdory tomuto lákadlu většina dělníků ostentativně schůzi opouštěla, a vrátným, kteří měli nařizeno odcházející pracovníky evidovat, se kupily v náručí píchačky, jež od nich vybírali.

Mezi technickou inteligencí existovala tehdy téměř bez výjimky vzájemná důvěra, kterou nikdo nezneužil, takže vyprávět politickou anekdotu bylo možné podle mých zkušeností i před soudruhy straníky zcela bez rizika. To bylo způsobeno tím, že by každý ambiciózní komunista, který by tento kolektiv narušil, pravděpodobně zmizel za velkými plechovými dveřmi ve „speciálním oddělení“, jež bylo od ostatního provozu skutečně dobře „odděleno“. Za tyto dveře jsem se nikdy nedostal a také jsem po tom nikdy netoužil. Odtamtud se totiž řídila přísně utajovaná zbrojní výroba, takže tam směli (a museli) pracovat jen dobře prověřeni pravověrní komunisté. To jsem nebyl, do závodu jsem nastoupil po svém propuštění z nechvalně známých táborů nucených prací PTP. Důležitým tajným artiklem, který se v závodě v odděleném provozu za vysokou zdí vyráběl, byl sovětský tank T-34, proslavený v bitvách druhé světové války. Dodával se naší armádě a také se vyvážel. O stupni utajení jeho výroby nejlépe svědčí následující příhoda.

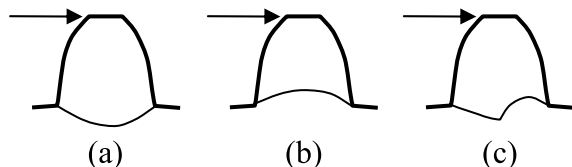
Jednoho dne si vedoucí konstrukce lokomotiv odnášel ve své aktovce ze závodu několik zahraničních i tuzemských časopisů, které dávala závodní knihovna konstrukčním kancelářím do organizovaného oběhu. Bdělý vrátný tyto časopisy našel a jeden z nich ihned zabavil. Nepodezíral zná-

mého šéfkonstruktéra z krádeže, neboť přijal jeho vysvětlení, že si časopisy odnáší, aby si je v klidu domova prostudoval (časopisy byly ostatně neprodejné, knihovna je orazítkovala). Objevil však ve švýcarském týdeníku (nemýlím-li se, šlo o Technische Rundschau) obrázek sovětského tanku T-34 spolu s popisem a řezem jeho motoru. Byly tam prezentovány i tanky západních spojeneckých armád, ale těch si vrátný nevšiml. Takže tento časopis zabavil, protože obsahoval utajované údaje, a věc nahlásil na „zvláštním oddělení“.

Pracoval jsem tehdy v útvaru „hlavního konstruktéra“ v tzv. „studijním oddělení“, které kdysi založil pozdější profesor ČVUT Ferdinand Budinský (1905–1956). Poskytovali jsme servis konstrukčním kancelářím především tím, že jsme pro ně zpracovávali nejnovější poznatky z literatury a uskutečňovali složité výpočty, na které by konstruktéři sami neměli čas a mnohdy ani potřebné znalosti. V mezích možností daných skromným přístrojovým vybavením jsme se věnovali i experimentálním metodám a materiálovému výzkumu. Důležitou činností oddělení bylo také vyšetřování příčin poruch vyráběných strojů a jejich odstraňování. V této činnosti jsem záhy vynikl, protože jsem měl dobré znalosti mechaniky i nauky o materiálu. Zvláště dobře jsem ovládal tvarovou pevnost a také únavu materiálu, což byla nejčastější příčina poruch. Jednoho dne jsem byl spolu se svým kolegou Ing. Vladimírem Markem, který se stal později hlavním metalurgem, nečekaně pozván k sympatickému řediteli Ing. Pavlíčkovi. Ten nastoupil do závodu teprve nedávno, přišel z hlavní správy ministerstva těžkého strojírenství a hned začal s novým elánem uskutečňovat svá předsevzetí s cílem zvýšit produktivitu práce a upevnit pracovní kázeň. Poradě byl přítomen také „hlavní inženýr“ Rón. Pozvání mne nepřekvapilo, zato obsah porady mne překvapil velmi.

V důvěrném rozhovoru jsme se dověděli, že se v naší armádě vyskytly četné poruchy převodovek montovaných do tanků T-34. U ozubených kol se vylamovaly zuby a převodové skříně praskaly. Styční armádní důstojníci a jejich sovětsí poradci se domnívali, že jde o sabotáž, za kterou nese vedení závodu ČKD Sokolovo plnou odpovědnost. Ředitel nás proto požádal,

abychom příčinu poruch neprodleně vyšetřili. Spolu s hlavním inženýrem byl přesvědčen, že výroba v našem závodě je přinejmenším stejně kvalitní jako v Sovětském svazu, takže jádro problému asi nebude ve vadné výrobě. „Nepodaří-li se to prokázat, pak půjdeme v nejlepším případě do basy,“ ukončil ředitel závodu svůj výklad. Dal nám písemné pověření, podle kterého byly všechny provozy závodu povinny nám vyjít všemožně vstříc a zařídit neprodleně cokoli, oč je požádáme.



Obr. 32.1

Podivil jsem se, že jsem dostal takové pověření, ačkoli jsem nepatřil k prověřeným straníkům a úkol se týkal utajované výroby. Chápal jsem však, že vedení závodu teče do bot, a byl jsem přesvědčen, že nařčení proti němu jsou neoprávněná. Ihned jsme s kolegou Markem navštívili montážní dílnu, kde se poškozené skříně opravovaly. Viděli jsme ozubená kola s ulámanými zuby, na nichž bylo možno pozorovat tři druhy lomových ploch, jak je naznačeno na obr. 32.1. Lom na obr. 32.1(a) měl drobně zrnitý povrch, jaký pozorujeme u kvazikřehkých lomů ocelových zkušebních tyčí na trhacích strojích. Lom probíhal od jednoho kořene zubu k druhému zhruba podél izostatické plochy, v které působí (v zatíženém zubu) hlavní napětí. Budeme jej nadále stručně označovat jako *lom křehký*. Lom znázorněný na obr. 32.1(b) měl zcela odlišný vzhled. Lomová plocha byla lesklá a na jejím povrchu byly stopy jakýchsi „škrábanců“ rovnoběžných s čelní rovinou kola, směřovaly tedy ve směru šíření lomu. Lom se šířil zhruba v plochách, v nichž působí největší smyková napětí, takže budeme nadále hovořit o *lomu smykovém*. Nešlo o únavový lom, na kterém by byly patrné „letorosty“ rovnoběžné s čelem trhliny, tedy kolmé k čelní ploše kola (kolmé k popisovaným škrábancům). Kromě toho by se únavový lom šířil kolmo k hlavním napětím, tedy v stejné izostatické ploše, jaká je zakreslena na

obr. 32.1(a). Konečně na jiných kolech byly lomy smíšené, jak naznačuje obr. 32.1(c). Ozubená kola měla přímé ozubení s modulem 9 mm, šířka zubů byla 45 mm. Kola byla vyrobena z chromniklové cementační oceli typu 1,5% Cr a 3,5% Ni, byla cementována do hloubky 1,2 až 1,5 mm a zakalena. Tvrdost jádra se pohybovala mezi 39 až 45 HRC, tvrdost cementační vrstvy byla 58 až 62 HRC.

V dílně jsme také viděli, jak se z prasklé skříně odlité z lehké slitiny vymontovává zalisovaný hřídel či spíše čep, na kterém se posouvalo ozubené dvojkolí, sloužící k reverzaci chodu (zařazení zpátečky). Čep vytloukal dělník ocelovou tyčí s mírně zahnutým koncem, přičemž do druhého konce tyče mlátil těžkou palicí. Všiml jsem si, že na čele čepu je otvor se závitem, který se má zřejmě používat při demontáži. Ptal jsem se proto dělníka, nemá-li na demontáž nějaký přípravek se šroubem, kterým by čep snadno vytáhl. Odpověděl, že takový přípravek existuje, ale nikdy se s ním nepovedlo žádný čep vytáhnout, šroub se vždy přetrhl. Vypůjčil jsem si výkresy a výpočtem jsem se přesvědčil, že síla potřebná k vytažení čepu je tak velká, že se v přípravku přetrhne každý šroub i z nejpevnější oceli. Podal jsem tedy „zlepšovací návrh“, aby se otvor se závitem v čepu nevyráběl, když jej není možné použít. Zdůvodnění návrhu jsem doložil výpočtem a odkazem na dlouholetou praxi. Zlepšovací návrh putoval na ministerstvo národní obrany, odkud mi došla asi za půl roku odpověď: *Nelze-li čep šroubem přípravku vytáhnout, je nutné rekonstruovat přípravek. Návrh se zamítá.* Nepotřebné díry se závitem se tedy vyráběly dál.

Pustili jsme se s chutí do práce. Zkoumali jsme metalografické výbrusy, mechanické vlastnosti materiálu v cementační vrstvě i v jádře, kontrolovali chemické složení materiálu a jeho tepelné zpracování. Abychom se vyhnuli případným námitkám ze „střetu zájmů“, zadali jsme část materiálových rozborů a zkoušek Státnímu výzkumnému ústavu materiálu v Opletalově ulici v Praze. Druhou část jsme zadali zkušebně hlavního metalurga našeho závodu. Nejistili jsme žádné výrobní vady. Zatímco kolega Marek se staral o tyto rozborů a zkoušky, já jsem se věnoval výpočtům sil působících na zuby ozubených kol v převodové skříně za různých provozních

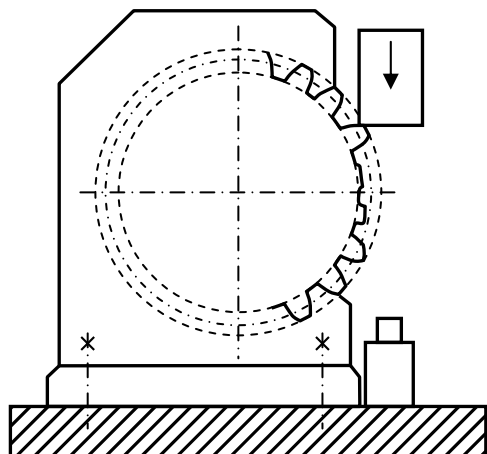
podmínek a přemýšlel nad vznikem smykových lomů ve tvaru znázorněném na obr. 32.1(b). Za jakých podmínek může takový lom vzniknout?

Právě jsem se věnoval těmto úvahám, když do dveří vešel sovětský poradce. Vyptal se na naši činnost, prohlásil, že podle jeho názoru jde o únávodový lom způsobený materiálovými vadami, například trhlinkami v cementované vrstvě vzniklými nesprávným postupem při kalení. Snažili jsme se mu tyto názory vyvrátit, ale neúspěšně, expert trval na svém. Přátelsky se s námi rozloučil, popřál mnoho úspěchu a odešel. O několik dní později jsme byli pozváni na další důvěrnou poradku k řediteli závodu. Vysvětlil nám, že musel řešit dvě nepříjemné věci. Jednak to, že vydal – aniž to tušil – pověření k řešení utajovaného problému politicky nespolehlivému člověku. To vyřešil tím, že můj kádrový materiál podrobně prozkoumal a přesvědčil příslušné stranické funkcionáře a kádrové pracovníky, že sice nejsem členem strany a byl jsem v PTP, ale že jsem se v závodě mnohokrát osvědčil při odstraňování příčin poruch strojů, a to bych jistě nedělal, kdybych to s lidově demokratickým zřízením nemyslel poctivě. Jak jsem se přesvědčil nahlédnutím do svých kádrových materiálů po roce 1989, ředitel si vyžádal nové posudky od mých některých spolupracovníků, kterými doplnil nebo i nahradil posudky dřívější, méně vhodné. To mi později velice pomohlo při konkursu na místo vysokoškolského učitele. Takže jsme si pomohli navzájem. Druhá věc byla vážnější. Sovětský poradce podal stížnost na naši práci. Prý zastáváme nesprávné názory a sabotujeme vyšetření příčin poruch, neboť zadáváme materiálové zkoušky a metalografické rozborů Státnímu výzkumnému ústavu materiálu, aniž od něho vyžadujeme písemné závěry. Tato možná námitka nás vskutku nenapadla. Vyžádali jsme si zjištěná fakta doložená protokoly ze zkoušek a fotografiemi mikrostruktur, ale nikoli závěry. K těm jsme snadno dospěli sami. Sovětský poradce žádal naše odvolání a obvinění ze sabotáže, což bylo totéž jako zavření. Ředitel tento požadavek odmítl, požádal nás však, abychom byli ve styku s armádními činiteli a zejména jejich poradci co nejopatrnější. V té době jsem si neuvědomoval nebezpečí, které hrozilo mně samotnému, začal jsem se však obávat o našeho ředitele.

Usoudili jsme, že nejlepší obrana je útok, a proto jsme si pozvali zástupce armády, abychom je seznámili s prozatímními výsledky. Vysvětlili jsme jim, že materiálové a výrobní závady nebyly zjištěny. Zato výskyt lomů podle obr. 32.1(b), popř. 32.1(c), může vést k odhalení příčin poruch. Domníváme se, že lom tohoto druhu vzniká usmýknutím při rázu, při němž velká nárazová rychlost a radiální tlaková složka síly znemožňují vyvinutí lomu, jaký známe při statických zkouškách pevnosti zubů [obr. 32.1(a)]. Jiným způsobem nemůže takový lom vzniknout. Rozhodně popíráme, že by šlo o únavový lom, a jsme schopni tento názor dokázat. Svědčí o tom fraktografický rozbor a také fakt, že nikde nebyla nalezena únavová trhлина před dolomením zubu. Myslíme, že kinematika vzniku lomu podle obr. 32.1(c) musí být taková, že smyková část smíšeného lomu musí být vždy na tlačené straně kořene zubu. Je-li toto tvrzení pravdivé, o čemž jsme přesvědčeni, musí být přinejmenším část lomů způsobena současným zařazením dvou rychlostních stupňů. Tím a jedině tím se totiž zablokují převody a zároveň vzniknou mimořádně veliké síly, které působí na zuby některých kol v opačném smyslu než síly vznikající za normálního provozu. To bylo teoretickým rozbohem dokázáno. O existenci těchto opačných sil svědčily nalezené smíšené lomy. Uvědomujeme si, že k tomuto závěru potřebujeme přesvědčivý důkaz. Ten budeme schopni podat, jestliže prokážeme platnost naší hypotézy o vzniku smykového lomu také experimentálně, tj. zkouškami na padostrojích, a to nejlépe na originálních kolech o modulu 9 mm. Námitku, že současnému zařazení dvou rychlostních stupňů brání kulisy omezující pohyb řadicích táhel neuznáváme, protože jsme se dověděli, že řidiči tanků mají s řazením obtíže a překonávají je tím, že do řadicí páky tloučou palicemi.* Rychlosti se totiž řadily pákou, pod níž byla kulisa. Z ní šla dozadu k převodovce tři řadicí táhla. Ta řadila stupně 4 a 5, popř. 2 a 3, a ta poslední 1 a Z. Při nesprávném seřízení kulisy a táhel šlo skutečně zařadit dva převodové stupně najednou. (Bylo tam ještě jedno slabé místo, a to spojení řadicího táhla se synchronizační spojkou v převodovce. To se mohlo uvolnit.) Popsaným způsobem mohlo dojít k posunu kulisy, které jsou

* Ve výzbroji tanku byla mj. 10kg palice a pila břichatka.

k převodovým skříním pouze přišroubovány. Protože odpovědnost za seřízení kulisy mohla být přisouzena řidiči, snažili se řidiči na porouchané skříně nastavení kulisy a táhel opravit. Tomu by se mělo napříště zabránit, aby se zjistil skutečný stav skříně v okamžiku poruchy. Tvrdíme tedy, že chyba je na straně armády, která nezajišťuje, aby řidiči tanků měli na převodových skříních správně seřízené kulisy a táhla a aby zachovávali předepsané postupy. Důstojníci nevěřičně kroutili hlavami, ale namítnout nedokázali nic.



Obr. 32.2

My jsme zatím pokračovali v práci. Objednali jsme si vertikální padostroj AMSLER s razníkem o hmotnosti 50 kg, který dopadal z výšky necelých 5 metrů, ale asi po půl roce jsme dostali místo toho jakýsi „Pendelschlagwerk“ na zkoušky houževnatosti umělých hmot, malý kyvadlový padostroj, který se dal provozovat na psacím stole. Omyl vznikl kdesi v administrativě závodu či ministerstva. Podařilo se nám však zjistit, že námi původně požadovaný padostroj stojí bez užitku v laboratořích generálního štábu armády. Dostali jsme povolení, abychom na něm ozubená kola vyzkoušeli. Dali jsme si proto vyrobit přípravky na jejich upevnění (viz obr. 32.2). Padostroj byl konstruován tak, že razník dopadl na zub rychlostí asi 8 m/s a způsobil lom zubu, při kterém se spotřebovala část jeho kinetické energie. Zbývající část energie razníku se změnila při jeho

následném dopadu na plunžr ve válci s kapalinou, která na jiném místě předala silový impuls jinému závaží. Zaregistrovala se výška, do které toto závaží vyskočí. Tak byla zjištěna jeho polohová energie, která odpovídala hledanému zbytku energie razníku po ulomení zubu. Odečtením obou energií – vstupní a zbylé – se vypočítala energie spotřebovaná k vylovení zubu.

Zkoušky potvrdily naši hypotézu, podle které vzniká smyková část lomu pouze na tlačené straně ohýbaného zubu, a to bez jediné výjimky. Analyzovali jsme také vliv geometrie kol (počtu zubů) na výsledek rázové zkoušky, vliv houževnatosti jádra, hloubky cementované vrstvy, jejího mikroskopického složení a její tvrdosti, jakož i vliv chemického složení. Výpočtem se prokázalo, že při různých kombinacích současně zařazených rychlostních stupňů vznikají při témže krouticím momentu na spojce na různých kolech i různě velké rázové síly a že u kol, na něž působí síly největší, je také nejčastější výskyt lomů. Četnost smykových lomů (a u smíšených lomů zubů jejich poměrná velikost) však byla závislá i na počtu zubů a byla větší u menších kol. To souviselo pravděpodobně s tím, že u malých kol je mezera mezi zuby otevřenější a radiální (tlaková) složka rázové síly působící na bok zubu je v poměru k tangenciální složce, která působí ohyb zubu, větší. U velkých kol (s počtem zubů rovným nebo větším než 34) zcela převažovaly křehké lomy ve tvaru podle obr. 32.1(a). Energie potřebná k uražení zubu smykovým lomem byla podstatně větší než při křehkém lomu (průměrně asi o 100% u velkých kol a o 40% u malých). Přitom kinetická energie tanku jedoucího rychlostí 20 km/hod byla několiksetkrát až tisíckrát větší než energie potřebná k ulomení zubu (maximální dovolená rychlost tanku byla 55 km/hod). Při statickém lomu (při velmi malé deformační rychlosti) se smykové ani smíšené lomy zubů nevyskytovaly nikdy, a to ani u malých kol. Tento poznatek je právě opačný, než k jakému vedou rázové zkoušky tahem na rovných zkušebních tyčích. Tam se s rostoucí zatěžovací rychlostí rozsah smykové části lomu vytrácí [viz FARLÍK, ONDRÁČEK (1968)].

Zaradovali jsme se, když do místnosti vstoupil opět náš starý známý sovětský expert. Seznámili jsme ho s naší hypotézou i s výsledky zkoušek.

Kroutil hlavou a nesouhlasil. Zkoušky na padostroji jsou věc jedna, praxe v terénu věc druhá. To, co považujeme za smykový lom, je prý nesporně únavový lom, který se u menších kol rozšíří často po celé lomové ploše, ale u jiných kol zabere jen malou nebo žádnou část a zbytek se dolomí rázem křehkým lomem. O tom bychom se neměli přít a raději hledat, co způsobuje, že některý únavový lom zabere celou plochu a jiný skoro žádnou. V tom musí být nějaká výrobní vada, kterou bychom měli odhalit. Třeba jde o větší nebo menší počáteční trhlinu po špatném zakalení kola. Kromě toho naše tvrzení odporuje skutečnosti, že tyto tanky urazily bez poruch vzdálenost od Stalingradu až do Berlína. (Expert přitom taktně pomlčel o tom, že životnost tanků posuzovaná podle ujetých kilometrů před zásahem dělostřeleckého granátu či pancéřové pěsti byla velmi krátká. Tank pak musel do opravy nebo do šrotu. Nebyl to tedy jeden a tentýž tank, který urazil vzdálenost Stalingrad–Berlín.) Expert nás také poučil o tom, že se porušují jenom převodovky vyrobené u nás. A naše hypotéza o současném zařazení dvou rychlostních stupňů je scestná, protože konstrukce skříně se v bitvách osvědčila a zařadit za pohybu tanku dva rychlostní stupně najednou prostě nejde, a to ani kdyby byly kulisy a táhla na převodové skříně chybně seřízeny. Popili jsme čajičku a opět se přátelsky rozloučili.

Rozhodl jsem se vsadit všechno na jednu kartu. Požádal jsem výrobu o namontování převodové skříně, která neprošla kontrolou pro nějaké nevýznamné rozměrové úchytky, ale byla funkční. Požádal jsem zkušeného továrního řidiče tanku, aby si seřídil kulisu a táhla tak, aby mohl za jízdy zařadit dva rychlostní stupně najednou, což povede k rozbití skříně. Na tovární dvůr s připraveným tankem jsme pozvali náčelníky armádního štábu i sovětského experta. Tank se rozjel, rychlostní skříně zarachotila, ale neulomilo se nic. Požádal jsem, aby řidič pokus opakoval. Zase nic. Celý zoufalý jsem přistoupil ke škvíře, kterou bylo možno k řidiči promluvit, a povídám mu: „Prosím Vás, copak neumíte tu skříně rozbít? Jestli se Vám to nepovede, jsme všichni ztraceni!“ Udivený řidič se zeptal, má-li skříně opravdu rozbít, myslel si, že ne. Tak se rozjel potřetí a ihned skříně rozbil. O současném zařazení dvou rychlostních stupňů se bylo možno na řadicích

táhlech na vlastní oči přesvědčit. Po rozebrání skříně se uvnitř našly ulomené zuby a na nich i smykové lomy, a protože šlo o jednorázové zatížení, nemohla být o únavě materiálu žádná řeč. Ani to však našemu oponentovi nestačilo. Pokus prý byl uměle naaranžován, a je tedy neprůkazný.

Ted' byla každá rada drahá. Měli jsme ještě poslední naději, že se nám totiž podaří najít spojence uvnitř generálního štábu Československé armády. Jeho prostřednictvím jsme pak dosáhli toho, že tankovým praporům byl vydán rozkaz, podle kterého se nesmí s porouchaným tankem nijak manipulovat, dokud k tomu nedá přivolaný pověřený zástupce výrobního závodu svůj souhlas. Netrvalo dlouho, a podařilo se najít prasklou převodovou skřín, u které byly v současném záběru dva rychlostní stupně, přičemž řadičí táhla a porouchaná kola byla zaklíněna tak, že se s nimi na místě nedalo nijakým způsobem hnout, ba ani s kulisou se nedalo manipulovat. Dali jsme tuto cennou relikvii vymontovat a opatrně dopravit do našeho závodu. Pozvali jsme sovětského experta a zástupce naší armády. Poprvé jsme se na ně upřímně těšili.

Jaké však bylo naše překvapení, když místo našeho starého známého experta přišel expert jiný. „Čo bolo, to bolo“ (jak pravil major Terazky ve známé Švandrlíkově knize) – o tom se nehovořilo. Nový expert přijal bez námitek naše vysvětlení a potvrdil naše závěry. K spokojenosti jsme však měli ještě daleko. Když jsme odečetli případy lomů při prokazatelně současně zařazených dvou rychlostních stupních, zbylo ještě mnoho případů, u kterých to nebylo možné dokázat. Bylo pravděpodobné, že existuje ještě jiná příčina lomů zubů. Rozhodli jsme se proto neusnout na vavřínech a pátrali jsme dál.

Tehdy byly skoro po celý rok zvýšené dešťové srážky, terén na tankodromech mohl být rozmoklý a tanky těžké více než 30 tun v něm mohly snadno uváznout. V instruktážních příručkách pro řidiče byl pro takové případy předepsán velice náročný postup. Posádka (normálně pětičlenná) si měla opatřit rovný, dostatečně silný a dlouhý kmen stromu, a ten připevnit k pásům na přední části bojového vozidla. Tank tento strom jednoduše přejel a poté jej posádka na zadní straně vozidla zase uvolnila. To se podle

potřeby opakovalo. Z toho měla posádka pochopitelně strach a snažila se proboření tanku do změkklého terénu včas předejít. Jakmile řidič zjistil, že tank už nedokáže udržet rychlost, vypnul spojku, motor roztočil na vysoké otáčky a spojku náhle pustil. Tímto rázem vyvodil silový impuls, který často stačil tank popostrčit, přičemž se před tanku trochu zvedla. Opakovaný manévr někdy stačil k odvrácení hrozby uvíznutím tanku, jindy však způsobil náhlý lom zubů. V takovém případě nebyly ovšem žádné zuby vystaveny silám působícím v opačném směru než za běžného provozu. Jak však dokázat, že tomu tak skutečně je?

Povolal jsem si na pomoc statistiku. Od meteorologických služeb na našich letištích jsem si vyžádal přehled srážek a vynesl je do grafu spolu s četností poruch, u nichž nebylo prokázáno současné zařazení dvou rychlostních stupňů. Ukázalo se, že mezi oběma těmito průběhy lze statistickými metodami dokázat jejich významnou souvislost.

Výsledky jsme zpracovali do objemné zprávy, která byla tajná a skončila v trezoru. Litovali jsme zejména toho, že svoje poznatky o vzniku smykového lomu zubů u rázově namáhaných ozubených kol nemůžeme publikovat. Odvážili jsme se toho teprve na třetí konstruktérské konferenci Ústavu pro výzkum strojů ČSAV, pořádané ve dnech 20. až 22. listopadu 1957 na zámku v Liblicích [viz HÖSCHL, MAREK (1959)], i když jsme samozřejmě nikde neuvedli, v jaké souvislosti jsme se k předneseným výsledkům dostali. Teprve po několika dalších letech byla naše zpráva skartována a poté odtajněna. Dnes tedy o tomto zajímavém problému sice můžeme svobodně diskutovat, ale originální zprávu už nemáme.

Pokud jde o našeho ředitele, který nad námi po celou dobu našeho výzkumu držel ochrannou ruku, ten byl záhy po skončení naší práce na tomto úkolu ze závodu propuštěn pod záminkou, že si na stavbu svého rodinného domku zakoupil od závodu cihly za režijní cenu. Tenkrát totiž bylo pravidlem, že všichni zaměstnanci mají právo si zakupovat za režijní cenu od vlastního závodu jakýkoli tam uskladněný materiál a také si zapůjčovat pracovní nářadí. Toto opatření mělo redukovat počet krádeží. Tentokrát tedy platilo: *Quod licet bovi, non licet Iovi*. Ve starověku to platilo obráceně.

České vysoké školy ve dvacátém století

Školství v Čechách před první světovou válkou

Dne 6. června 1908 byl v pražském Národním divadle zahájen pětidenní IV. sjezd českých přírodopyscův a lékařů. Na jevišti byli reprezentanti sjezdu a čestní hosté, v přízemí byli účastníci sjezdu, na balkonech byly dámy.

Bylo přihlášeno asi 700 přednášek a program byl rozdělen do sedmnácti sekcí (od matematiky, fyziky a chemie přes astronomii a zemědělství až po lékařství a farmakologii). V seznamu přednášejících najdeme zvučná jména badatelů, kterých si váží ještě i dnešní generace odborníků. Např. chemik Emil Votoček přednášel o konfiguraci některých metylpentos a mimoto předváděl ukázkou technické rafinace antracénu, fyzik Vladimír Novák přednášel o nepřímých metodách barevné fotografie, známý spoluautor Technického naučného slovníku Vladimír Teysler demonstroval svůj přístroj ke zkoumání radioaktivních vod a matematik Bohumil Bydžovský hovořil o diskrétních skupinách transformací v geometrii. Nechyběla ani přednáška Jana Evangelisty rytíře Purkyně na téma *Technik ve službách hygieny*. Ze seznamu účastníků uveďme už jen několik dalších jmen: Č. Strouhal, J. Vojtěch, B. Mašek, F. Rádl, J. Hýbl, V. Felber, Z. Bažant, J. Stoklasa, A. Heveroch.

Na tomto sjezdu jsou pozoruhodné dvě skutečnosti:

1. Ačkoli se účastníci domáhají založení druhé české univerzity, vysoké školy zemědělské a veterinární, důraz se klade především na zkvalitnění středních škol.

2. Sjezdu se účastnili kromě Čechů i Poláci, Rusové, Bulhaři, Srbové, Chorvati, Ukrajinci, Slováci a Slovinci. Neúčastnili se představitelé německých vysokých škol v Čechách, ani z Rakouska či Německa.

Tyto skutečnosti svědčí o tom, že těžiště vzdělanosti nesly na svých bedrech především střední školy, z nichž vycházeli často vynikající odborníci, popř. i pozdější vysokoškolští učitelé. Zároveň však bylo české školství poznamenáno protiněmeckými náladami, které se táhnou našimi novo-

dobými dějinami jako červená nit od dob národního obrození. V souladu s tehdejší duchem doby byl některými účastníky sjezdu vznášen požadavek, aby se česká věda vymezovala *proti* vědě německé. Do rozkvětu české vzdělanosti bylo tak vsazováno a náruživě pěstováno – ať z jakýchkoli pochopitelných důvodů – semínko izolacionizmu, xenofobie a národní nesnášenlivosti. Jedovaté plody těchto nálad uzrály poměrně záhy. Princip národního sebeurčení vedl po první světové válce k růstu evropských nacionalismů, ty pak vyústily v druhou světovou válku s dalekosáhlými důsledky a nakonec vedly i k rozpadu Československé republiky a přispěly také k nedávné balkánské krizi.

Nepředbíhejme však. Jsme ještě ve starém mocnářství, o němž jedna část našich praotců prohlašovala, že to byl ideál svobody a blahobytu, a druhá část, že jsme pod jeho jhem tři sta let úpěli.

Školství v první Československé republice

První světová válka neznamenal pro české školství (na rozdíl od slovenského) prakticky žádnou diskontinuitu. Základem vzdělanosti byly stále především střední školy, jejichž úroveň byla vynikající. Kromě nich navazovaly na obecné školy i školy průmyslové a nejrůznější školy odborné. K přípravě studentů ke studiu na vysokých školách sloužily výhradně gymnázia a reálky. První připravovaly na humanitní obory, druhé na technické. Snaha o větší univerzalitu vedla k typu reálných a reformních reálných gymnázií. Studium na těchto školách bylo zakončeno maturitou, která potvrzovala zralost studenta pro vysokoškolské studium.

Za střední školy se považovaly pouze tyto reálky a různá gymnázia. Ve školním roce 1929/30 na nich studovalo více než asi 80 000 studentů, z nich 70 % Čechů a Slováků, 24 % Němců a 6 % jiných národností. Těchto škol bylo 296, z nich 204 s českým nebo slovenským vyučovacím jazykem. Ve třídě bylo průměrně 30 studentů. V téže době studovalo na 33 průmyslových školách něco přes 16 000 studentů, z toho jen necelé jedno procento dívek.

Na českých univerzitách studovalo tehdy 12590 studentů, z nich 1091 cizích státních příslušníků, což je 8,7 %. Na německé univerzitě studovalo 4073 studentů a z nich 524 cizinců (12,9 %).

Na českých technikách bylo 7000 studentů, z nich 1587 cizinců (22,6 %). Na německých technikách studovalo 3734 studentů, z nich 1103 cizích státních příslušníků (29,5 %). Největší podíl cizinců měla německá technika v Brně, a to plných 35,5 %.

Na konci dvacátého století studovalo pouze na Karlově univerzitě v České republice zhruba dvakrát tolik studentů než tehdy na všech univerzitách v celé Československé republice, zato cizinců tam studovalo jen 6,3 %. Na ČVUT studovalo v téže době necelých dvacet tisíc studentů a z nich jen 1,2 % cizinců (cizích státních příslušníků) (!).

Z přehledu je zřejmé, že procento cizinců studujících tehdy na čs. vysokých školách bylo poměrně velké, o něco větší na školách německých než českých. Na brněnské německé technice tvořili cizinci více než třetinu z celkového počtu studentů. To svědčí o značné přitažlivosti, a tedy i kvalitě těchto škol. Ačkoli české vysoké školy přejímaly mnoho německých vzorů i učebnic, styky s německými školami se příliš nepěstovaly, a to ani uvnitř státu, neřku-li města. Toto oddělení se ještě prohloubilo po nástupu Adolfa Hitlera k moci.

Vliv německé okupace

V polovině devatenáctého století napsal Karel Havlíček Borovský, že svoboda bez vzdělanosti národa je nemožná. Proto není divu, že souběžně s potlačením svobody se německá okupační moc rozhodla zasáhnout i proti vzdělanosti. Mnoho českých, ale i německých vzdělavců emigrovalo, nebo bylo dříve či později pozavíráno a často fyzicky likvidováno. Vysoké školy byly r. 1939 uzavřeny.

Když tuto etapu naši historikové posuzují, zapominají – často pod optikou pozdější komunistické propagandy – na drobné, ale významné činy některých členů tehdejší protektorátní vlády, kterými se snažili zabránit

nejhoršímu. Takovým neprávem zapomenutým činem bylo rozhodnutí tehdejšího ministra školství Kaprase otevřít pro absolventy středních škol tzv. *abiturientské kurzy*, v nichž učili většinou vysokoškolští učitelé a jejichž absolventi alespoň částečně zaplňovali mezeru v české inteligenci vzniklou uzavřením vysokých škol. Kolaborantský tisk to tehdy komentoval slovy: „Máme ve vládě teď **ka prase**.“

Uzavření vysokých škol a útlak v bývalém Protektorátu měly i svou pozitivní stránku. V opozici k okupačnímu režimu se totiž zformovala nová generace příštích vysokoškoláků s vysokou občanskou i studijní morálkou. Ti ovšem začínali studovat až po válce. Mravní kvalita těchto studentů se projevila i v jejich postoji ke komunistickému převratu r. 1948, po němž však byla znovu ohrožena. Společenské klima se začalo po válce záhy měnit. Projevila se demoralizace způsobená mj. hromadným a prakticky beztrestným rozkrádáním a vyvlastňováním majetku po třech milionech vyhnaných německých spoluobčanech, jejichž provinění nebylo třeba prokazovat. Získané zkušenosti se velmi dobře hodily v nastávajícím třídním boji. Tehdejší prezident Edvard Beneš reagoval na celkový úpadek mravů v poválečné republice teprve ve svém posledním veřejném projevu, který mu bylo dovoleno přednést při oslavách šestistého výročí založení Karlovy univerzity, slovy: *Nepodaří-li se nám obroditi se také mravně, prohrajeme svůj boj a brzy to pocítí celý národ*. Svůj boj jsme však tehdy již prohráli, a to na velmi dlouhou dobu.

Rozpad morálních hodnot za období komunismu

Zmínili jsme se již o některých negativních důsledcích národního obrození, o růstu nacionalismů a xenofobních nálad a o jakémsi podivném negativizmu, souvisejícím s neustálým bojem proti něčemu (proti Němcům, proti fašistům, proti buržoazii, proti tzv. západnímu imperialismu atd.).

Když Francouzi otevřeli r. 1990 v normandském městě Caen pozoruhodný Memorál dokumentující historický vývoj světa ve dvacátém století, mohl si každý stát z protihitlerovské koalice napsat své heslo na malý po-

mníček umístěný spolu s vlajkami ve vkusně upraveném exteriéru. Většina států zvolila pozitivní hesla: umírali jsme za svobodu, za demokracii, za humanitní ideály. Československý pomníček však oznamoval, že jsme bojovali proti fašismu.

Komunistický převrat spustil další emigrační vlnu. Republiku opouštěla nejen inteligence, ale i schopní podnikatelé, živnostníci a řemeslníci. Vlády v podnicích se ujímali tzv. dělničtí ředitelé. Je s podivem, že se historikové dosud nezabývali vyčíslením škod, které tito lidé způsobili svým nekvalifikovaným rozhodováním.

Inteligence, která zůstala, se rozdělila na část, jež se pokoušela přežít a s režimem v rozumných mezích spolupracovala. Byla za to trpěna, ale také podle okolností pronásledována. Druhá část usilovala o podíl na moci, a to často za každou cenu. Někteří předstírali, že upřímně věří tehdy hlásané utopii, podle které bude za komunismu člověk pracovat, jen když se mu zachce, a za to dostane, cokoli bude potřebovat. Marxistickou ideologií zastírali své mocenské ambice. Byli i komunisté z přesvědčení, z různých idealistických pohnutek, ti ale roku 1948 nutně vystřízlivěli. Pravověrnými zůstali nadále jen lidé slabého intelektu nebo lidé se sklonem k sektářství; těch nebylo mnoho a byli časem svými asertivními soudruhy vytlačováni a zbavováni politického vlivu.

Vysoké školy byly zasaženy nejen emigračními vlnami, ale také radikálními čistkami, a to jak po roce 1948, tak také po sovětské okupaci r. 1968. Na některých školách byly čistky obzvláště radikální. Tak na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci, na které např. v roce 1973/74 působilo celkem 217 pedagogů, bylo čistkami po roce 1968 postiženo 109 osob, z nich 80 pedagogů, 8 vědeckých aspirantů a 12 studentů.

Je třeba si uvědomit, že vysoké školy nebyly v rukou přesvědčených doktrinářů a revolucionářů; byly většinou vedeny pokryteckými kolaboranty, kteří na jedné straně horlivě předstírali, že jsou komunisté, ale na druhé straně obratně bránili skutečným radikálním komunistům získat větší podíl na moci. Tato vcelku chvalitebná snaha má však jeden rub: pokrytectví a falešná hra se jaksí nehodí do prostředí šířícího nejvyšší vzdělanost. To

však nebyl jediný zdroj mravního úpadku. Vytrvale a jednostranně hlásaný materialismus posiloval v mnoha lidech ješitnost, sobectví a bezohlednost.

Politická kritéria byla nadřazena nad odborná. Při obsazování míst profesorů a docentů se sice konkurzní komise pod patronací komunistické strany zabývaly i odbornými aspekty, ale v zákulisí stranických sekretariátů se pečlivě zkoumalo, zda je možné od kandidáta očekávat, že správně pochopí pravidla mocenské hry pod vedením KSČ a zúčastní se jí. Politický tlak se uplatňoval v různých místech a v různých dobách různě.

Největším neštěstím pro vysoké školy bylo, že uprázdněná místa po neustálých politických čistkách zaujímalí snaživci druhé až třetí kategorie. *Kvantitativní růst byl tak provázen kvalitativním úpadkem.* Čím méně se noví vysokoškolští pedagogové hodili na svá místa, tím urputněji se snažili využít vlastního poměrně velkého vlivu k tomu, aby zabránili svému vystřídání lidmi schopnějšími.

Mnozí akademičtí funkcionáři získávali s podporou rodné strany pocit bohorovnosti. Tomu odpovídal i způsob řízení vysokých škol, v němž chyběla objektivní zpětná vazba. Vytvářel se tak prostor pro korupci nejrůznějšího druhu. Pro přijetí ke studiu atraktivního oboru po neúspěšném přijímacím řízení stačil telefonát významného stranického funkcionáře. Zápočet obstarala sekretářka katedry za lahvičku tuzexového parfému. Někteří pedagogové zvali studenty (a zvláště studentky) ke zkouškám do vináren a dokonce do bytů. Jistý asistent podmiňoval udělení zápočtu odpracováním směny na stavbě své soukromé garáže. Jiný obstarával studentkám prospěch výměnou za sexuální hrátky. Líčit podrobnosti těchto případů by znamenalo poklesnout na úroveň bulváru. Čtenář, který by chtěl obhájit důstojnost vysokého učení, by mohl namítat, že jde o ojedinělá selhání, která nelze zevšeobecňovat. Necht' si dá takový čtenář laskavě tu práci a zevrubně prozkoumá, zda a *do jaké míry* je to na dnešních vysokých školách jiné. Zjistí, že i dnes, po pádu komunismu, existují dosti častá „ojedinělá selhání“. Provalené aféry na olomoucké a pražské právnické fakultě jsou toho příkladem. Zarážející je, že ještě ani dnes neznají mnozí vedoucí akademičtí funkcionáři skutečný stav. To se ukázalo, když rektor Karlovy

univerzity vyslovil v televizi domněnku, že ilegální prodej utajovaných přijímacích testů umožnila pravděpodobně nezkušenost pracovníků právnické fakulty ve styku s mafií. Ostatně, co jiného je, vybírá-li sekretářka od kandidátů, kteří předstupují před některé zkušební komise, předem (sic!) „příspěvek na občerstvení členů komise“, než skrytá forma drobné korupce? To bohužel není ojedinělý případ.

Rehabilitace na vysokých školách po sametové revoluci

Promarněné roky nelze vrátit, a co se stalo, nemůže se odestát. Nicméně učitelé, kteří byli z politických důvodů ze svých míst vypuzeni, se mohli na nějaký čas vrátit. Ti, kteří je vypudili, mohli většinou zůstat. A pokud ne, našli většinou útočiště na jiné fakultě či škole. Zůstat mohli často i jejich mladší následovníci, za komunistické éry náležitě prověřeni a proškolení. Zaštitěni svými hodnostmi a tituly, které mohli získat i bez citačních indexů a podobných nepříjemných ukazatelů, mají mnohde ještě i dnes převahu nad svými mladšími kolegy, byť třeba schopnějšími a s mezinárodním ohlasem svých prací, neboť ti musejí nová kritéria splňovat. Mezi nimi bývá i požadavek mít odučené roky. To znamená, že třeba technolog nebo konstruktér, i kdyby byl skvělý a geniální, se nemůže stát vysokoškolským docentem či profesorem, pokud předtím nepůsobil na vysoké škole po řadu let v nějaké nevýznamné pedagogické funkci. Nejlepší učitelé z historie ČVUT, kteří přicházeli přímo z praxe, by dnes asi neměli šanci. Kromě toho je nutné projít sítím tajných hlasování kolektivních orgánů, jejichž členové se v nejvyšších instancích skládají ponejvíce ze zástupců zcela jiných oborů, než je sám kandidát.

Z historie je známo, že Isaac Barow postoupil r. 1669 své místo vedoucího katedry tehdy sedmadvacetiletému Newtonovi, neboť ho považoval za schopnějšího. Vynikající inženýr, vědec a pedagog Jaroslav Hýbl byl r. 1917 za „zkostrnatělého“ starého Rakouska jmenován řádným profesorem ČVUT ve svých pětatřiceti letech. Přišel rovnou z praxe. Takové věci se dnes nemohou stát. Dnešní akademická obec si mnohem lépe než tehdy dokáže obhájit svůj status quo.

Je snadné kritizovat nedostatečné otevření škol mezinárodní soutěži, nedostatečný důraz na odborné kvality a morální profil učitelů. Je nesnadné zjednat nápravu. Často bývá kritizována mírnost tzv. sametové revoluce a neochota vypořádat se s minulostí. Mnozí z našich politiků to uznávají a svalují vinu jeden na druhého. Vina je však spíše v celkovém společenském klimatu. Kromě Švejka se stal společenským ideálem nevýrazný, zdánlivě neškodný typ usměvavého kolaboranta, schopného vyjít s každým režimem. Vždyť jde jen o to, jak přežít. Kdyby byla u nás zavedena přímá volba prezidenta, stal by se jím nepochybně někdo jako Karel Gott.

Vědecká práce na vysokých školách

Po komunistickém převratu velice utrpěla vědecká práce na vysokých školách převzetím sovětského modelu, totiž soustředěním vědy a výzkumu do nově institucionalizované Československé akademie věd. Tak bylo narušeno životodárné spojení vědy a výuky. Podobně byl postupně oddělován výzkum od výroby a soustřeďován v resortních výzkumných ústavech, čímž byla elita vědeckých pracovníků, ostatně vždy podezřelá pro své mezinárodní styky, oddělována od výchovného procesu na vysokých školách i od výrobního procesu v továrnách.

To vedlo k postupnému zaostávání vysokých škol, jež se stalo předmětem kritiky představitelů ČSAV volajících po nápravě. Roku 1960 přijala vláda usnesení, podle něhož měly vysoké školy využívat vědeckého potenciálu ČSAV. Vysoké školy se však bránily; vyhodily prý politicky nespolehlivé pracovníky jedněmi dveřmi a dnes by se jim druhými dveřmi vraceli zpět. Vysoké školy dostaly tehdy také značnou finanční částku na rozvoj „vědeckovýzkumné základny“. Ale ta byla zcela promarněna. Pomoc byla vedena jako kampaň. Požadovalo se např. zřizování radioizotopových laboratoří, a to i tam, kde pro to nebyly podmínky. Na některých pracovištích skončila tato akce ohozením stěn příští laboratoře baryovou omítkou. Finanční prostředky uvolněné jako už tradičně až koncem roku vedly k bezúčelnému plýtvání.

Tragické na celé věci bylo to, že některým školám a jejich funkcionářům tento stav vyhovoval. Nedostatek otevřenosti a soutěže umožňoval pohodlný život. Vědeckou práci stačilo jen vhodně předstírat, a často nebylo nutné ani to. V tom byla u nás situace horší než v samém SSSR. Také poměr k emigraci byl rozdílný. Zatímco u nás byl styk s kolegou v emigraci nemyslitelný, vedla např. AN-USSR v Kijevě emigranta Š. P. Timošenka žijícího v USA stále jako svého člena; jeho spisy byly překládány do ruštiny a vydávány.

Touha po izolaci (nebo snad podbízivost k režimu) byla u některých představitelů naší akademické obce tak silná, že ještě v polovině roku 1987 uspořádali na ČVUT mezinárodní konferenci o mechanice, na níž byla povinným jednacím jazykem ruština a již se mohli účastnit jen odborníci z tzv. východního bloku. Navzdory tomu železná opona padla a situace se začala radikálně měnit.

Pedagogická práce na vysokých školách

Po komunistickém převratu nastal v pedagogické práci vysokých škol velmi záhy rozvrat tradic a řádu. Zavedením ADK („akce dělnický kádr“) a tzv. „inženýrských kurzů“ se režim snažil vychovat si novou, sobě oddanou inteligenci i za cenu podstatného snížení požadavků na odbornou úroveň. Také náplň studia byla upravována podle dobových ideologických hledisek. Jako příklad se nejčastěji uvádí osudové zatracování kybernetiky jako tzv. buržoazní pavědy nebo prosazování falešné Lysenkovy teorie v biologii. Zásahů však bylo více a byly často až komické. Deskriptivní geometrie musela být nahrazena „konstruktivní geometrií“, neboť se měly potlačovat předměty údajně pouze popisné a měly se spíše konstruovat nové zírky. Z výuky i z vydavatelských plánů byl vyřazen Klíč k určování rostlin, neboť prý v žácích budil nežádoucí dojem, že druhy rostlin jsou neměnné a provždy dané.

Vysoké školy se v existenčním boji snažily o jakousi nezaměnitelnost a specifičnost. Ministerstvo tomu bránilo rozumným požadavkem, aby se

zmenšil počet specializací a rozšířil jejich obsah. Důvodem byla skutečnost, že většina absolventů se v praxi uplatňovala v jiných oborech, než na jaké byla zaměřena jejich studijní specializace. Školy si však našly způsob, jak se tomuto tlaku vyhnout, vytvořením skupin volitelných předmětů, a tedy skrytých specializací, jichž stále přibývalo.

Ze srovnání učebních plánů na vybraných strojních fakultách (se zaměřením na energetické stroje) vyplývá, že v porovnání s německou technikou v Praze klesl oproti konci devatenáctého století počet výukových hodin věnovaných matematice na 74 % v plánech SF ČVUT v Praze v letech 1945–1949, na 60 % v plánech VŠST v Liberci (1990) a na 74 % na VŠT v Košicích (1991). Poměrný podíl teoretických a průpravných předmětů (matematika, fyzika a mechanika všech fází) na celkovém rozsahu povinné výuky činil v těchto učebních plánech 39 % (německá technika v Praze), 31 % (ČVUT), 20 % (VŠST), 37,5 % (VŠT). Týdenní počet povinných výukových hodin se přitom zvětšil z průměru 20 v předminulém století až k hranici 36 v současnosti. Z velkých rozdílů v učebních plánech lze soudit, že se v nich odrážejí spíše partikulární zájmy kateder než objektivní potřeby oboru.

Numerus clausus a přijímací řízení

Stav, kdy počet absolventů středních škol byl přiměřený ke studijním možnostem na vysokých školách a kdy maturitní vysvědčení bylo jediným a postačujícím dokumentem podmiňujícím přijetí ke studiu, je dávno za námi. Návrhy, aby se přesto přijímali na vysoké školy všichni zájemci, a teprve během studia se vyřadili ti méně schopní, jsou sice demokratické a velice spravedlivé, ale zároveň utopické. Na fakultách není jednoduše dost místa, zejména ne tam, kde se vyžaduje i nezbytný praktický výcvik (např. v lékařství). Zavedení takového systému by bylo možné jen za cenu neúčelného a drahého prodloužení studia.

Většina vysokých škol a jejich fakult tedy podmiňuje přijetí ke studiu složením přijímací zkoušky. Tento systém je naveskrz špatný z těchto důvodů:

1. Devaluje se maturita jako průkaz zralosti k vysokoškolskému studiu.
2. Rozhodnutí, které dalekosáhle ovlivňuje životní dráhu uchazeče, se opírá o jedinou zkoušku, jejíž objektivita může být ovlivněna nahodilými vlivy.
3. Systém přijímacích zkoušek vytváří podhoubí pro možnou korupci.
4. Přijímací testy jsou vytvářeny a vyhodnocovány lidmi bez potřebné kvalifikace.

Jenom první tři z uvedených bodů jsou srozumitelné každému; u čtvrtého bodu je třeba se pozastavit.

Testy mají zjišťovat schopnost uchazeče studovat daný obor. Jak však testuje schopnost ke studiu práv otázka: „Která byla první pražská kavárna“? Znalost daného oboru ještě neznamená schopnost navrhnout správný test. K tomu je nutné znát teorii pravděpodobnosti a statistické metody; bez těchto znalostí nelze pochopit správný způsob tvorby testů a jejich vyhodnocování. Počet znalců této metodiky patrně nepřesahuje v ČR počet prstů na jedné ruce, a až na jednu výjimku neměli tito lidé – pokud je autorovi známo – příležitost své znalosti uplatnit.

Především je třeba připravený test ověřit na reprezentativním vzorku respondentů a zkoumat korelace mezi jednotlivými otázkami a jejich zodpovězením. Prokáže-li se, že ten, kdo odpoví správně na k -tou otázku, odpoví s velkou pravděpodobností správně i na otázku n -tou, pak jedna z těchto otázek je v testu zbytečná a měla by být nahrazena jinou. Jsou-li odpovědi na tyto otázky naopak naprosto nezávislé, byly otázky špatně položeny; nezkoumají totiž stejnou věc, tj. schopnost ke studiu daného oboru, ale týkají se každá něčeho jiného. Existuje-li tedy mezi odpověďmi na tyto dvě otázky velmi malá nebo naopak velmi vysoká korelace, je to vždy špatně. Žádoucí je *určitá míra korelace*.

V testu mohou být dále některé otázky velmi snadné a jiné velmi obtížné. V prvním případě odpoví téměř každý respondent správně, v druhém případě neodpoví správně téměř nikdo. Takové otázky *ztrácejí vypovídací hodnotu*. Obtížnost otázky nemůže posoudit a priori autor testu, neboť není důležité, co je obtížné nebo naopak snadné pro něho, ale pro respondenty.

Ti přicházejí z různých škol a z různých prostředí a jsou letos jiní, než byli třeba loni. Proto je nutné posoudit význam otázek a odpovědí à posteriori. Těm, u nichž se prokázala menší vypovídací hodnota, je třeba přisoudit menší váhu. Součet bodů, který pak rozhoduje o zařazení uchazeče, není prostým součtem správných odpovědí, ale *součtem váženým*. Váhové činitele lze při tom získat až při zpracovávání výsledků testu; nejsou známy předem. To zpracování výsledků poněkud komplikuje, byť nepodstatně.

Je neštěstím, že autoři testů a akademičtí funkcionáři odpovědní za přijímací řízení nemívají o těchto metodách ponětí. A je jen velmi málo fakult (autor ví pouze o jedné), kde se dodatečně a za mnoho let zkoumá, do jaké míry korelují výsledky přijímacích testů s výsledky studijními.

Výhled do budoucnosti

V důsledku neuvěřitelně rychlého pokroku v komunikačních prostředcích se svět zmenšuje a vzájemná propojenost jeho částí prohlubuje. Slovo „globalizace“ by se mělo vzít na vědomí jako pojem označující nevyhnutelný dějinný proces a nemělo by se jím strašit. Čím více bude mít lidstvo společných zájmů a čím více si tyto zájmy budou vynucovat vzájemné porozumění, tím menší bude pravděpodobnost katastrofálních střetů.

Vzdělanost už dávno překročila rámeček jednoho národa nebo státu, ba i rámeček jednoho světadílu. V tomto příspěvku jsme kritizovali zradu vzdělanců v našem století. Uveďme tedy na závěr světlý příklad velké prozíravosti a osobní statečnosti. Ludwig Prandtl (1875–1953) napsal dne 11. 5. 1938 redaktorovi časopisu *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* profesoru F. A. Willersovi dopis, v němž protestuje proti vylučování autorů židovského původu. Píše: *...O knize, která představuje důležitý pokrok ve vědě, se musí referovat, ať už je autor arijského nebo nearijského původu, a totéž platí i o člancích. Věci jsou obecně o to horší, že instance, které do toho mohou mluvit, mají stále větší strach, že i jim by se přitom mohlo něco přihodit.*

Asi o měsíc později (dne 15. 6. 1938) napsal Prandtl dokonce Říšskému a pruskému ministerstvu pro vědu, výchovu a vzdělání: *...Mechanika právě tak jako matematika a exaktní přírodní vědy nemají ze své celé vnitřní povahy ani nejmenší vztah k politice. Pokrok v těchto vědách spočívá v mezinárodní spolupráci. Jedna země nedá prostě při dnešní specializaci dohromady dost hlav, aby mohla tuto spolupráci postrádat. Toto hledisko, které ustoupilo po převratu r. 1933 poněkud do pozadí, se musí postupně opět uplatnit, nemá-li Německo utrpět škodu.*

Světlých příkladů tohoto typu z naší vlastní historie není mnoho, ale existují rovněž. Vzpomeňme na nesmlouvavého akademika O. Wichterleho a jím řízený Svaz vědeckých pracovníků, jehož smyslem bylo vynutit na politické garnituře z období „normalizace“ racionální způsob řízení společnosti s posílením prestiže elity vzdělanců. Příznačné pro tehdejší dobu bylo, že sekretariát Svazu byl úředně vystěhován a neskončil na ulici jen díky tomu, že našel útočiště v jednom ze slepeckých klubů. Záhy se pak jeho představitelé dověděli z denního tisku, že Svaz byl rozpuštěn. Jeho krátká, ale zářivá historie upadla dnes v zapomnění.

Vysoké školy by se měly ještě mnohem více než dnes otevřít soutěži a mezinárodní spolupráci. Kvalita vzdělávání, a nikoli kvantita polovzdělanců, to by měl být prvotní cíl. Například je třeba lépe vyjasnit vztah mezi bakalářským studiem na technikách a studiem na průmyslových školách. Přijímací řízení by se mělo oprostít od dnešních nešvarů například převzetím tzv. australského systému. Podle něho se schopnosti studentů hodnotí jednotnou soustavou testů a zkoušek v průběhu posledních dvou let středoškolského studia; maximálně dosažitelný počet bodů je 500. Přihlášky k vysokoškolskému studiu se soustředí na jediném místě a seřadí podle počtu bodů. Pak se podle počtu volných míst na té které fakultě či škole stanoví kritéria: minimální počty bodů nutných letos pro přijetí. Každý pak ihned ví, byl-li přijat. Kontrola je snadná a je veřejná. Žádná „odvolání“ neexistují. Zveřejněná kritéria motivují další ročníky uchazečů o studium daného oboru. Každý si může předem poměřit své síly a rozhodnout se. Lze namítnout, že ani tento systém není dokonalý, neboť nepamatuje na studen-

ty s výrazným, ale jednostranným nadáním. Tito studenti však mají možnost odejít do praxe a tam prokázat svůj talent. Získají-li potřebné doporučení, jsou přijímáni bez dalších formalit (a zpravidla patří k nejlepším, cílevědomým studentům). Takových studentů nebývá mnoho.

Otevřenost vnějšímu světu předpokládá i větší otevřenost uvnitř. Měli bychom se zbavit svých předsudků a chyb, což se nepodaří bez ujasnění našich vztahů k vlastní minulosti. Z té bychom si mohli vzít mnoho vzorů, ovšem zcela jiných, než které nám předvádějí dnes a denně zkomercionalizovaná média.

Uvedeme jeden příklad. Když Emil Kolben (1862–1943) založil r. 1896 Elektrotechnickou továrnu v Praze, měl 25 zaměstnanců. Zkušenosti získával v Evropě (především ve Švýcarsku) i v USA (pracoval i u T. A. Edisona). Ač židovského původu a absolvent německého Vysokého učení technického v Praze, řekl o sobě u příležitosti oslav svých pětasedmdesátin: *Vyzbrojen tak rozsáhlými vědomostmi a zkušenostmi ve všech odvětvích silnoproudé elektrotechniky a drže krok s tehdejšími nejmodernějšími pokroky ve výrobě elektrických strojů a zařízení, pomyslel jsem v srpnu 1896 na to, že dám své bohaté znalosti a zkušenosti do služeb své české domoviny.* Když ho členové SS v převlečení za zdravotníky vynášeli jako jedenaosmdesátiletého starce z bytu na nosítkách, zaměstnával koncern ČKD, jehož byl spoluzakladatelem, už 15 000 pracovníků. To byl jeho odkaz vlasti. O necelý měsíc později zahynul v Terezíně. Po válce se jeho jméno nesmělo na pamětní desce obětí nacismu v závodě ČKD objevit. Smělo se tam doplnit spolu s bronzovou plaketou až v r. 1991. Je ironií doby, že několik let poté byla pamětní deska i s plaketou ukradena neznámými vandaly.

Ing. Dr. h. c. Emil Kolben si psal také jakýsi pamětní spis, v němž najdeme i následující, až překvapivě aktuální úvahu z roku 1924:

...Ve Švýcarsku existují spolková rada a vlády kantonů. V Československu pak byla převzata většina státních zařízení jakož i administrativní organizace z Rakousko-Uherské monarchie, státu o 50-ti milionech občanů. Správní aparát je ještě komplikovanější, jednání s ním obšírnější a obtížnější.

V ČSR existuje více ministerstev, vyšších a nižších úřadů, než bývalo dříve. Byrokratické řízení se ve všech ohledech zkomplikovalo, místo aby se zjednodušilo. Mnohé by se zlepšilo, bylo-li by vedeno úřednictvo v duchu k větší osobní zodpovědnosti a angažovanosti.

Následkem jmenovaných okolností vznikl v ČSR neúměrně zvětšený, a tím i nákladný státní aparát.

K tomu ještě malou poznámku. Prezidium správní rady ČKD, a. s. v Praze, rozhodlo, že vzhledem k všesvětové tísní hospodářské sníží počínaje listopadem 1931 platy vedoucích pánů ředitelů o 25 %. A tak místopředseda správní rady ČKD dr. Emil Kolben od té doby dostával plat pouze 12 500,- Kč měsíčně. To byl přibližně pětinasobek platu průměrného úředníka. Jaký byl asi plat manažerů, kteří přivedli koncem dvacátého století koncern ČKD prakticky na buben?

Naše budoucnost nebude zřejmě lehká, jak jsme se ještě nedávno mohli domnívat. Nejvíce překážek, zdá se, představujeme sami sobě.

Tak to skutečně bylo

*Nyní pak zůstává víra, naděje, láska, to tré,
ale největší z nich jesti' láska.*

(Epišt. Sv. Pavla ke Korintským, 13, 13.)

Vzpomínka na profesora Ing. Dr. techn. Jaroslava Hýbla (1882–1950)

„Než prohlásíme o nějaké ženě, že je krásná, musíme si ji prohlédnout ze všech stran. Tak je to i s turbinovou lopatkou. Jenom krásná lopatka může mít dobrou účinnost. A tak si ji nejdřív prohlédneme, v půdorysu, v nárysu i v bokorysu.“ Takové a podobné věty zaznívaly v naplněné posluchárně strojní a elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze na Karlově náměstí. „Příroda je velmi složitá. Tak složitá, že jí nikdy plně neporozumíme. Musíme si ji proto zjednodušit. Vynecháme, co je nepodstatné, a tak vznikne ideální obraz toho, co chceme zkoumat. A když tento ideál ovládneme, tak se musíme snažit, aby se mu naše dílo (navrhovaný stroj) co nejvíc podobalo. To neplatí jen pro konstrukce strojů, to platí v životě obecně. Člověk si má vytvořit ideál, podle kterého se snaží žít. A tak je to i mezi národy. Takové Švýcarsko třeba, to je ideál. – A ani to není ideál. Víte, co je ideál?“ Posluchačům přednášky o vodních strojích se tajil dech. Vždyť bylo po „Vítězném únoru“ 1948. Kterýsi ze studentů hlesl: „Sovětský svaz!“ Profesor Hýbl toto provokativní zvolání přeslechl a do napjatého ticha prohlásil: „Království nebeské. A víte, co je to Království nebeské? To je stav, který na Zemi nastane, až budou mít všichni lidé rozum.“

Profesor Hýbl měl krátce přistřižené šedivé vlasy, ostře řezanou tvář a v koutku chvějivých úst zpravidla vyhaslou lulku, kterou si občas vždy znovu zapaloval. Chvěly se mu i ruce, a to tak, že mohl psát jen tužkou. Psával inkoustovou tužkou, kterou držel v pravé ruce; tu si přidržoval levicí. Psal jakoby kurzívou. Jeho písmo bylo velice úhledné, avšak s mírně zvlhnutými tahy. Nosíval světle zelené, drobně kostičkované vlněné sako

a v klopě čerstvou růží. Na pozdrav každému odpovídal hlasitým: „Má úcta“. Měl-li klobouk, smekal vždy s širokým máchnutím ruky. Ke svým podřízeným byl velkorysý. Nekontroloval pracovní dobu, ale pracovní výsledky. Běda však, zneužil-li někdo jeho důvěry. S takovým člověkem se rozloučil ihned a navždy. Stalo se, že sekretářka zameškala bez omluvy asi dva dny. Když se konečně dostavila, řekl jí profesor Hýbl: „Slečno, sem už mi víckrát nechodte.“ Nepomohly slzy, ani přímluva předsedy závodní rady ROH. Na námitku, že existuje zákonná výpovědní lhůta, odpověděl: „Tak si ji dejte kam chcete, ale sem mi už nesmí.“ Tento postoj způsobil, že mu závodní výbor už žádnou sekretářku nepovolil. Veškerou administrativní agendu od tohoto dne převzali asistenti.

Jednoho dne si pan profesor Hýbl přinesl dekret Místního národního výboru, který mu do jeho pracovny v rodinném domku prikazoval nájemníka. Adresa zněla: „Pan Jaroslav Hýbl, majitel domu čp. 168.“* Pan profesor nám nadiktoval svou odpověď. Obsahovala mimo jiné tyto body:

1. Nejsem vlastníkem domu čp. 168, ale 186, takže se mne Váš dekret netýká.

2. I kdyby se mne týkal, nemůže Váš výbor rušit dekret vydaný Ústředním národním výborem, který je Vám nadřízený. Ústřední národní výbor mi pracovnu přidělil platným dekretem jakožto vědeckému pracovníku.

3. Místnost nemůžete přidělit žádnému nájemníku, protože nejde o obytnou místnost ve smyslu bytového zákona. Místnost nemá připojení ke komínu, takže se nedá vytápět, a nemá ani okno, má pouze světlík.

O několik dní později jsem zaslechl ze sousední pracovny pana profesora ženský pláč a poté mužský rozčilený hlas: „Pořád mi tady meleš jedno a to samý! Vždyť ti říkám, že právníci jsou dneska vedle!“ Byla to nešťastná paní Hýblová. Příčinu jejího rozrušení jsme si mohli jen domýšlet. Po několika dnech přišel pan profesor zase v obvyklé dobré míře, s novým růžovým květem ve své klopě. „Tak co, pane profesore, smím se zeptat, jak to dopadlo s novým nájemníkem?“ odvážil jsem se opatrně vyzvídat. „Ale

* Čísla jsou změněna, paměť je nedochovala.

mám ho tam, už se nastěhoval. Už jsem se s tím smířil. Víte, on je ještě větší chudák než já.“

Tato příhoda ukazuje velikost jeho srdce, a ovšem též dobu, které nemůže porozumět nikdo, kdo ji opravdu neprožil. Pan profesor jezdil před válkou se svými studenty často na zahraniční exkurze, nejčastěji do Švýcarska a do Švédska, kde měl mnoho přátel v odborných kruzích. Stalo se, že od některého z nich dostal poštou darem balíček tehdy vzácných sardinek. Tehdy postavil své asistenty do řady a každému jednu krabičku dal. Sám si nesl domů zbývající tři. Za vedení strojních laboratoří dostal jednorázovou roční odměnu. Opět si postavil své asistenty do řady a odměnu mezi ně rozdělil. Nedalo mi to a v příhodné chvíli jsem se ho zeptal, proč to dělá, vždyť odměna patří jemu. „Protože tam chodíte Vy,“ zněla jednoduchá odpověď.

Krátce před Vánocemi si mne zavolal a dal mi do ruky list papíru, na kterém stálo: „Vydejte doručiteli Kčs 10 000,- (slovy deset tisíc). Jaroslav Hýbl.“ S tímto listem jsem zašel do fakultní pokladny a peníze jsem dostal. A opět si pan profesor postavil asistenty do řady a peníze jim rozdával se slovy: „To Vám dávám proto, že Pán Ježíš byl velký člověk. Učil totiž, že největší věcí na světě je láska.“

Jednoho dne ponechal pan profesor pootevřené boční dveře do své pracovny. Možná bezděky, avšak mohl tak učinit i úmyslně, aby měl svědky k svému rozhovoru. Přišel totiž student, člen fakultního výboru Komunistické strany Československa, a začal pana profesora přesvědčovat, aby souhlasil s chystanou reformou studia. „Tak Vy říkáte, že je třeba studium reformovat. Já Vám zase říkám, že naše vysoká škola je výborná. Mám tady dopisy našich bývalých studentů ze zahraničí, kteří nám profesorům děkují za to, jak jsme je pro jejich úkoly připravili. To ale neznamená, že reformu nepotřebujeme. Ovšem tu musejí připravovat odborníci na slovo vzatí, to nemohou dělat studenti jako Vy. Odpusťte, ale vždyť Vy nemáte ani všechny prospěchové zkoušky.“ Tak a podobně hovořil pan profesor. Student mu oponoval, seč mu síly stačily, ale nakonec se dostal do defenzívy: „Já to, pane profesore, vzdám.“ – „Vzdáte? To je trochu pozdě! Víte, co jste měl

udělat, když Vám tu funkci svěřovali? Vy jste ji měl odmítnout! Vy jste měl říct, to já nemůžu, na to já nestačím. Tak jedná čestný člověk.“

„Proboha, pane profesore, co jste to udělal? Vždyť Vy jste vyhodil od zkoušky zakladatele Libčického údernického hnutí! Ó já, to bude malér!“ varoval pana profesora asistent. V tom již kdosi klepal na dveře profesorsky pracovny. Byl to postižený student a začal panu profesorovi vyprávět o svých budovatelských zásluhách. „Tak vidíte, Vy jste takový zasloužilý student, a Vy byste se nestyděl chtít zkoušku zadarmo?“

Už jsem byl na jiném pracovišti, když jsem se dověděl, že pan profesor Hýbl byl hospitalizován v nemocnici na Karlově náměstí na klinice profesora Prusíka pro rakovinu plic. Sehnal jsem narychlo krabičku jeho oblíbených smetanových krémových sýrů (gervais značky CREMO) a ještě s jedním asistentem, který sehnal odněkud pravé plzeňské pivo, jsme šli pana profesora navštívit. Ležel na lůžku unaven, ale měl očividnou radost. Sebral všechny své síly, aby nás ubezpečil, že naše doba teprve přijde. Zdálo se nám, jako by se v duchu vracel ke své inaugurační přednášce, kterou pronesl při svém nástupu do rektorské funkce v roce 1936. Stojí za to ocitovat konec jeho přednášky:

Rozvoj přírodních věd je nesmírný. Je tak velký, že inženýr, lékař atd. se může dnes věnovat jen úzkému oboru, aby v něm byl odborníkem, a nestačí již pomalu ani na ten obor. A při vši té velikosti vědy vidíme nespokojenost velkých myslitelů. Čím hlouběji vynikají, tím jsou nespokojenější, neboť vidí, že jsou na tu skutečnost slabí. Musíme mít úctu k vědě a umění, poněvadž to je to největší, co lidstvo má. Nesmíme však ustrnouti, poněvadž je před námi velká cesta. Lidstvo stojí teprve na začátku té cesty. Je povinností vysokých škol dáti posluchačům správné vědecké základy, neplniti je však spoustou vědomostí, které si musí pamatovat, a nebuditi v nich pevné přesvědčení o neomylnosti vědy. Buditi v nich lásku a zálibu i k té zdánlivě nejsušší vědě tak, aby posluchač neodcházel z přednášky znechucen. Méně látky, ale více přemýšlení. Podrobnosti najdeme v knihách, podrobnostmi nemáme zatěžovati drahocenný mozek. Můžeme máti zůstati svěží, nezatížený, aby mohl postřehovati slabiny vědy a pracovati tak k pokroku. Posluchači, kteří opouštějí

vysoké školy již unaveni, s přeplněnými hlavami, již mnoho velkého nevykonají. Méně dřít a více přemýšlet, a to již na středních školách!

*Velká je příroda a slabý je člověk. Víme, že největší myslitelé byli nejvíce nespokojeni se svým životním dílem, které dali lidstvu. Jen ten, kdo nepochopil své malosti ve velkém přírodním dění, může být domýšlivý. Génů, kteří razí nové směry za velkým poznáním přírody, je málo. Všichni jsou jen dělníky, někteří větší, většina menší. Stavba vědy je dosud v začátcích, i když si myslíme, že jsme daleko. Bude třeba dlouhého, velkého idealismu, než se přijde k základům, na kterých pak vyrosté teprve vlastní budova pravého poznání přírody. Vždyť člověk žije teprve okamžik, za který nemohl daleko proniknouti. Jsme ještě v temném zrození. Světlo pravého poznání je v dáli. Jen idealismus může vésti lidstvo k vyšším metám, které musí mít před sebou, neboť jen idealismus je zdrojem velkého.**

Profesor Dr. Jaroslav Hýbl se narodil 21. dubna 1882 v Koldíně v Čechách, kde byl jeho otec řídícím učitelem. Obecnou a měšťanskou školu navštěvoval v Ústí nad Orlicí. Roku 1896 přestoupil po přijímací zkoušce ze třetí třídy měšťanské školy do čtvrté třídy reálky v Kutné Hoře, kde roku 1900 složil maturitní zkoušku s vyznamenáním. Na střední škole vynikal zejména v deskriptivní geometrii a kreslení. Byl odměněn výroční cenou, která se udělovala nejlepšímu kreslířům. Po maturitě vstoupil na České vysoké učení v Praze, kde studoval obor strojního inženýrství. Všechny prospěchové i obě státní zkoušky složil s výborným prospěchem. Po všechna studijní léta byl odměňován stipendiem za výborný prospěch. Po druhé státní zkoušce, kterou vykonal hned po dokončení čtvrtého ročníku, nastoupil místo konstruktéra v Českomoravské továrně na stroje v Praze. V roce 1905 byl promován na doktora technických věd. Téhož roku obdržel jednoleté Hlávkovo cestovní stipendium ke studiu tehdy mladého oboru parních turbín. Pobyl v Německu, Švýcarsku, Itálii a Belgii, kde navštívil řadu strojírén pro stavbu parních turbín a četné parní elektrárny. Roku 1906 se vrátil a pracoval v oboru všeobecného strojnictví První Českomoravské továrny

* Citováno ze sborníku *České vysoké učení technické v Praze ve studijním roce 1935–1936*. Nákladem ČVUT, Praha 1937.

na stroje. Dvě léta poté se habilitoval pro obor parních turbín na ČVUT. V roce 1914 se stal přednostou oddělení pro strojní chlazení v Českomoravské strojírně, kde setrval až do roku 1917. Tehdy byl jmenován profesorem hydraulických strojů, strojního chlazení a topení na Vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství ČVUT. Po smrti profesora Zvoníčka se stal přednostou strojní laboratoře ČVUT na Karlově náměstí. Od roku 1926 byl mimořádným členem České akademie věd a umění a členem Československé národní rady badatelské při téže akademii. Byl předsedou komise pro II. státní zkoušky, členem Mezinárodního ústavu chladicí techniky v Paříži a protektorem Spolku posluchačů a absolventů strojního a elektrotechnického inženýrství. Odborná a vědecká literární činnost profesora Hýbla zahrnuje přes 70 prací z hydrauliky, termomechaniky, hydraulických strojů, strojního chlazení, parních turbín a všeobecného strojnictví.

Než jsme s kolegou opustili nemocniční pokoj, chytil mne profesor Hýbl za ruku a řekl: „Největší věcí na světě je láska. Řekněte, když Vás má někdo rád, dal byste to za zlaté peníze?“ V příštích dnech jsem se již ostýchal pana profesora navštívit. Báł jsem se, že by mu to nebylo při jeho těžké zdravotní krizi milé, ale spíše než to jsem se báł svých citů, které bych asi nedovedl ovládnout. Miloval jsem ho jako svého otce. Zašel jsem do malého květinářství, které bylo na kraji Hybernské ulice, a poprosil jednu z obou mladých květinářek, zda by do nemocnice nezašla místo mne. Ráda to slíbila. Koupil jsem velkou kytici růží a druhý den se přišel zeptat, jak dívka své poslání splnila. Řekla mi, že pan profesor již nebyl na lůžku, ale seděl v křesle, neboť mu to usnadňovalo dýchání. Růže přijal se zjevným dojetím. Další den ráno – 14. srpna 1950 – po velkém utrpení zesnul, smířen s Bohem.

Použitá literatura

- BAHNÍK, V. a kol. (1974): Slovník antické kultury. Nakladatelství Svoboda, Praha.
- BAŽANT, Z. a kol. (1944): Nauka o pružnosti a pevnosti. Technický průvodce sv. 3, Česká matice technická, Praha.
- BELL, J. F. – STEIN, A. (1962): *Journal de Mécanique*, vol. 1, No. 4, pp. 395–412.
- BENEŠ, J. (1936): Descartesova metoda ve vědách a ve filosofii. Nakladatelství České akademie věd a umění, Praha.
- BERNOULLI, D. (1738): *Hydrodynamica*. Argentorati, Štrasburk.
- BLAŽEK, B. (1994): Bída naší vědy (1. část). *Vesmír*, 73, s. 93.
- BOWDEN, F. P. – TABOR, D. (1954): *The friction and lubrication of solids*. Clarendon Press, Oxford.
- BREPTA, R. – OKROUHLÍK, M. – VALEŠ, F. (1985): Vlnové a rázové děje v pevných tělesech a metody jejich řešení. Studie 16-85. Academia, Praha.
- BREPTA, R. – PROKOPEC, M. (1972): Šíření napět'ových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha.
- DRTINA, F. (1948): Úvod do filosofie (Myšlenkový vývoj evropského lidstva), sv. 2. Jan Laichter, Praha.
- DRYDEN, H. L. (1963): Contributions of Theodore von Kármán to applied mechanics. *Applied Mechanics reviews*, vol. 16, pp. 589–595.
- FARLÍK, A. – ONDRÁČEK, E. (1968): *Teorie dynamického tváření*. SNTL, Praha.
- FÖPPL, A. (1905): *Vorlesungen über technische Mechanik*, sv. 1. Teubner-Verlag, Leipzig.
- GERMAIN, P. (1973): *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- GÖRTLER, H. (1975): Zur Geschichte des Π -Theorems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 55, No. 1, S. 3–8.
- HRBEK, J. (1979): *Radiační teorie gravitace a stavba hmoty; gravitace jako nevyčerpatelný zdroj energie*. SPN, Praha.

- HÖSCHL, C. – MAREK, V. (1959): Rázová pevnost zubů ozubených kol s větším modulem. In: *Zásady novodobé konstrukce strojů*. Sborník Ústavu pro výzkum strojů ČSAV a Československé vědecké technické společnosti pro strojnictví při ČSAV, Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.
- IN MEMORIAM, Karl Popper v Praze (1994): 3. lékařská fakulta KU v Praze a Nadace Středoevropské university, Praha.
- JOHNSON, W. (1972): *Impact strength of materials*. Arnold, London.
- KAHUDA, F. (1975): Mentiony a fyzikální projevy myšlení. *Časopis lékařů českých*, 114, s. 881–891.
- KAHUDA, F. (1980): Hmotnosti psychonů a mentionů a možnosti jejich měření. *Časopis lékařů českých*, 119, s. 70–76.
- KOLSKY, H. (1963): *Stress waves in solids*. Dover Publ., New York.
- KOŽEŠNÍK, J. (1958): *Dynamika strojů*. SNTL, Praha.
- KOŽEŠNÍK, J. (1979): *Kmitání mechanických soustav*. Academia, Praha.
- LAEMMEL, R. (1957): *Isaac Newton*. Büchergilde Gutenberg, Zürich.
- LANCZOS, C. (1957): *Applied analysis*. Sir Isaac Pitman, London.
- LANCZOS, C. (1970): *The variational principles of mechanics (4.ed.)*. University of Toronto Press, Toronto.
- LEONARDO DA VINCI (1982): *Nápady (výbor z próz)*. Odeon, Praha.
- LORENZ, K. (1997): *Odumírání lidskosti*. Mladá fronta, Praha.
- MATHEWS, J. – WALKER, R. L. (1965): *Mathematical methods of physics*. W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam.
- NOETHER, E. (1918): Invariante Variationsprobleme. *Göttinger Nachrichten*, S. 235–257.
- OKROUHLÍK, M. (1994): Mechanics of contact impact. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, pp. 34–99.
- OKROUHLÍK, M. – HÖSCHL, C. (1990): *Elastica revisited*. *Acta Technica*, No.1, pp. 28–47.
- PAIDOUSSIS, M. P. (1970): Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *Journ. Mech. Engng. Science*, Vol. 12, No. 2, pp. 85–103.

- POPPER, K. R. (1992): Unended quest: An intellectual autobiography.
Revidované vydání: Routledge, London.
- PRAGER, W. (1961): Introduction to mechanics of continua. Ginn, Boston.
- RALSTON, A. (1973): Základy numerické matematiky. Academia, Praha.
- ROSEAU, M. (1984): Vibrations des systèmes mécaniques. Méthodes analytiques at applications. Masson, Editeur, Paris.
- SZABÓ, I. (1964): Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag, Berlin.
- SZABÓ, I. (1967): Mechanika tuhých těles a kapalin (překlad z něm.).
SNTL Praha.
- SZABÓ, I. (1968a): Die ursprünglichen Fassungen einiger Gesetze der Mechanik. *Die Bautechnik*, sv. 45, č. 1, s. 1–8.
- SZABÓ, I. (1968b): Extremalprobleme in der Mathematik und in den Naturwissenschaften. In: *Humanismus und Technik*, Vol. 12, Heft 1. Universität Berlin.
- TODHUNTER, I. (1962): History of the calculus of variations in the nineteenth century. Chelsey, New York (reprint z roku 1861).
- TRUESDELL, C. (1964): Die Entwicklung des Drallsatzes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 44, No. 4–5, S. 149–158.
- TRUESDELL, C. (1964a) Essays in the History of Mechanics. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- WALKER, J. (1985): Fly casting illuminates the physics of fishing. *Scientific American*, vol. 253, No. 1, pp. 98–102.
- WILMS, E. W. – KOHEN, H. (1997): The occurrence of Painleve's paradox in the motion of a rotating shaft. Trans. ASME, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, No. 4, pp. 1008–1010.
- YATES, F. (1964): Giordano Bruno and the hermetic tradition. University of Chicago Press, Chicago.