

Bulletin

České společnosti pro mechaniku

1 / 2026



Bulletin

České společnosti pro mechaniku

1 / 2026

Bulletin je určen členům České společnosti pro mechaniku.

Vydává Česká společnost pro mechaniku, Dolejškova 1402/5, 182 00 Praha 8-Libeň.

Bulletin České společnosti pro mechaniku je vydáván s finanční podporou Akademie věd ČR.

Vychází: 2x ročně

Místo vydávání: Praha

Datum vydání: 31. července 2026

ISSN 1211-2046

Evid. č. UVTEI 79 038

MK ČR E 13959

Redakce

Prof. Ing. Iva Petříková, Ph.D.

Studentská 1402/2, 46117 Liberec

Fakulta strojní, Technická univerzita v Liberci

Tel.: 485 352 947

E-mail: bulletin@csm.cz

Jazyková korektura českých textů

Eva Koudelková

Jazyková korektura anglických textů

Nicola Susanne Karásková

Sazba a grafická úprava

Pavel Koudelka

ČESKÁ SPOLEČNOST PRO MECHANIKU

Asociovaný člen
European Mechanics Society
(EUROMECH)

Předseda

Prof. Ing. Vladislav Laš, CSc.

Tajemnice sekretariátu

Zdeňka Krejcarová

Sekretariát

Dolejškova 1402/5, 182 00 Praha 8

Tel.: 266 053 045, tel./fax: 286 587 784

E-mail: csm@it.cas.cz

Domovská stránka

<https://www.csm.cz>

IČO společnosti

444766



Obsah

Ze života společnosti.....	2
Informace o mimořádné schůzi hlavního výboru České společnosti pro mechaniku	2
Vyhlášení voleb do hlavního výboru ČSM.....	3
Články.....	6
Mýty a pověry v mechanice tekutin I: Zákony zachování.....	6
Polární rozklad deformačního gradientu a celnice	15

Contents

From the Life of the Society	2
Information Regarding the Extraordinary Meeting of the Main Committee of the Czech Society for Mechanics.....	2
Announcement of Elections to the Main Committee of the CSM	3
Papers.....	6
Myths and Misconceptions in Fluid Mechanics I: Conservation Laws	6
Polar Decomposition of Deformation Gradient and Female Customs Officer.....	15

Informace o mimořádné schůzi hlavního výboru České společnosti pro mechaniku

Information Regarding the Extraordinary Meeting of the Main Committee of the Czech Society for Mechanics

Vedení České společnosti pro mechaniku (dále jen Společnosti) obdrželo zprávu o abdikaci Ing. Jiřího Náprstka, DrSc., na funkci předsedy Společnosti z důvodu jeho dlouhodobých zdravotních problémů. Dne 27. 5. 2026 byla proto v Brně uspořádána mimořádná schůze hlavního výboru ČSM, která se konala netradičně v hotelu Maximus Resort Brno.

Cílem schůzky bylo naléhavé řešení výše uvedeného bodu programu dle čl. 8 odst. (6) Stanov ČSM za přítomnosti místopředsedy a alespoň tří dalších členů výboru. Aby Společnost mohla nadále pokračovat ve své činnosti včetně uskutečňování finančních transakcí, bylo třeba ustanovit dočasné vedení Společnosti v souladu se Stanovami ČSM. Mimořádné schůze se zúčastnili prof. Ing. Iva Petříková, Ph.D., prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc., prof. Ing. Milan Růžička, CSc., doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc., prof. Ing. Jan Vimmr, Ph.D. Přítomní členové hlavního výboru navrhli, aby do příštího řádného zasedání hlavního výboru převzal od 1. 6. 2026 řízení Společnosti současný místopředseda prof. Ing. Vladislav Laš, CSc. Prof. Laš s touto nominací souhlasil.

Výbor zároveň pověřil zastupujícího předsedu prof. Laše, aby převzal práva podpisového vzoru pro bankovní transakce a svolal řádnou schůzi hlavního výboru Společnosti, která by připravila nové volby do hlavního výboru ČSM.

Postup byl zaznamenán prof. Ing. Milanem Růžičkou, CSc.

Na řádném zasedání hlavního výboru ČSM byl podle Stanov prof. Vladislav Laš ve funkci jednomyslně potvrzen.

Zapsal prof. Ing. Milan Růžička, CSc.

Vyhlášení voleb do hlavního výboru ČSM

Announcement of Elections to the Main Committee of the CSM

Vážené členky a vážení členové ČSM,

hlavní výbor České společnosti pro mechaniku (dále jen Společnosti) dovršil čtyřleté volební období své činnosti, a podle Stanov Společnosti tak předsednictvo ČSM vyhlašuje volby do hlavního výboru Společnosti, které proběhnou ve druhé polovině roku 2026. Informace o Volebním řádu jsou k dispozici na stránkách Společnosti (https://c.csm.cz/files/zpravy_o_cinnosti/Volebni_rad.pdf). Další informace o způsobu provedení voleb jsou uvedeny v tomto čísle Bulletinu a také na našich stránkách (www.csm.cz).

Volby proběhnou ve dvou etapách, a to elektronicky. Postup bude stejný jako při minulých volbách. V první etapě budete mít možnost podle svého uvážení doplnit Předběžnou kandidátku pro volby do hlavního výboru ČSM, která je uvedena níže. Tato verze kandidátky je publikována také na našich webových stránkách.

Vaše doplňující návrhy adresujte sekretariátu Společnosti (csm@it.cas.cz) do **16. 9. 2026**. Doplněná, a tedy definitivní kandidátka bude po tomto datu zveřejněna na webu Společnosti (www.csm.cz/dokumenty/).

V druhé etapě proběhne samotná volba na základě doplněné kandidátky. Členové dostanou detailní informace, jak se má volba provést, hromadnou e-mailovou zprávou. Volby budou probíhat v období **od 21. 9. do 11. 10. 2026** elektronicky, a to vyplněním formuláře na stránkách Společnosti (www.csm.cz). Volič může zvolit **maximálně 18 jmen z kandidátní listiny**. Anonymita voličů je softwarově zajištěna (viz Článek 4 Volebního řádu). Vyhodnocení voleb proběhne v souladu s Volebním řádem (viz Článek 5). Výsledky budou zveřejněny na stránkách Společnosti a v dalším čísle Bulletinu ČSM.

Abyste mohli volit elektronicky, je třeba být přihlášení do intranetové databáze Společnosti. Většina členů tak již učinila přinejmenším při příležitosti minulých voleb. Prosím však kolegyně a kolegy, kteří tak dosud neučinili, aby se do databáze přihlásili teď. K tomu je potřeba (i) uživatelské jméno a (ii) osobní heslo. Uživatelské jméno je jednoduché, neboť se rovná Vaší e-mailové adrese.

Pro získání osobního hesla se, prosím, spojte se sekretariátem Společnosti. Tyto dva údaje Vám umožní se do databáze přihlásit a následně pak volit.

Vyzývám Vás, abyste se zamysleli nad navrhovanými kandidáty do nového hlavního výboru Společnosti a svou uvážlivou volbou přispěli k úspěšnému a efektivnímu chodu Společnosti v dalším období.

Přejeme Vám šťastnou volbu.

Vladislav Laš

Předběžná kandidátka pro volby do hlavního výboru České společnosti pro mechaniku, z. s.

doc. Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D.	ZČU v Plzni, FAV, Plzeň
doc. Ing. Martin Bílek, Ph.D.	TU v Liberci, FS, Liberec
Ing. Dušan Gabriel, Ph.D.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.	ZČU v Plzni, FAV, Plzeň
prof. Ing. Pavel Hutař, Ph.D.	ÚFM AV ČR, v. v. i., Brno
prof. Ing. Radim Halama, Ph.D.	VŠB–TU Ostrava, FS, Ostrava-Poruba
prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.	ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Praha
prof. Ing. Ondřej Jiroušek, Ph.D.	ÚTAM AV ČR, v. v. i., Praha
doc. Ing. Radek Kolman, Ph.D.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.	VUT v Brně, FSI, Brno
prof. Ing. Jaroslav Kruis, Ph.D.	ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Praha
Ing. Alena Kruisová, Ph.D.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
prof. Ing. Jiří Křen, CSc.	ZČU v Plzni, FAV, Plzeň
doc. Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.	VUT v Brně, FSI, Brno
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.	VUT v Brně, FAST, Brno
Ing. Luděk Pešek, CSc.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
prof. Ing. Iva Petříková, Ph.D.	TU v Liberci, FS, Liberec
prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.	VUT v Brně, FSI, Brno
Ing. Jiří Plešek, CSc.	ÚT AV ČR, v. v. i., ředitel, Praha
doc. Dr. Ing. Pavel Polach	VZÚ Plzeň, Plzeň
prof. Ing. Stanislav Pospíšil, Ph.D.	ÚTAM AV ČR, v. v. i., Praha
prof. Dr. Ing. Eduard Rohan, DSc.	ZČU v Plzni, FAV, Plzeň
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.	ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Praha
doc. Ing. František Šebek, Ph.D.	VUT v Brně, FSI, Brno

prof. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.	ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Praha
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.	ČVUT v Praze, FS, Praha
prof. Ing. Václav Uruba, CSc.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
prof. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.	ZČU v Plzni, FAV, Plzeň
Ing. Václav Vinš, Ph.D., DSc.	ÚT AV ČR, v. v. i., Praha
prof. Ing. Jaroslav Zapoměl, DrSc.	VŠB–TU Ostrava, FS, Ostrava-Poruba

Předběžnou kandidátku je možné doplnit o další členy, případně ji jinak upravit. Podmínkou je, že navrhovaný člen musí s kandidaturou souhlasit.

Návrhy na doplnění kandidátky zašlete na e-mailovou adresu csm@it.cas.cz.

Definitivní kandidátka bude doplněna o Vaše návrhy a zveřejněna pro volby, které probíhají elektronicky na webových stránkách ČSM.

V Praze dne 26. 6. 2026

za hlavní výbor České společnosti pro mechaniku
prof. Ing. Vladislav Laš, CSc.

Mýty a pověry v mechanice tekutin I: Zákony zachování

Myths and Misconceptions in Fluid Mechanics I: Conservation Laws

Prof. Ing. Václav Uruba, CSc.

Motto:

„Vše má být co nejjednodušší, ale ne jednodušší.“

Parafráze myšlenky A. Einsteina¹

Úvod

Výuka inženýrské mechaniky se tradičně soustředí především na popis toho, **jak** fyzikální systémy fungují, zatímco otázka, **proč** fungují právě tímto způsobem, zůstává často v pozadí. Studentům je předkládán rozsáhlý matematický aparát – ve formě rovnic, algoritmů či softwarových nástrojů – který lze relativně snadno aplikovat a který ve standardních případech poskytuje správné výsledky. Tento aparát však mnohdy funguje jako černá skříňka: umožňuje výpočet, aniž by nutně vedl k porozumění fyzikální podstatě problému.

Důsledkem tohoto přístupu je, že se v učebnicích mechaniky tekutin i v běžné výuce objevují nepřesné formulace, implicitní předpoklady a zjednodušení, která mohou zakrývat skutečnou fyzikální strukturu problému. Pojmy jsou často zaváděny bez jasného vymezení oboru platnosti a bez rozlišení mezi idealizací a reálným systémem. Bez tohoto vymezení nelze očekávat, že student dokáže

¹ Přesná citace: „Stěží lze popřít, že nejvyšším cílem každé teorie je učinit základní prvky co nejjednodušší a nejméně početné, aniž bychom přitom museli obětovat jediný empirický fakt.“ EINSTEIN, Albert. On the Method of Theoretical Physics. *Philosophy of Science*, 1934, Vol. 1, No. 2, s. 163–169.

naučené postupy správně aplikovat na situace, které se byť jen mírně liší od typických ilustračních příkladů.

Tento text je prvním dílem volné série věnované rozšířeným mýtům a zavádějícím interpretacím v mechanice tekutin tak, jak se s nimi autor setkal během dlouhodobé výzkumné i pedagogické praxe. Text je určen čtenářům se základní znalostí mechaniky kontinua a je zamýšlen jako interpretační a diskusní nadstavba. Nejde o zpochybnění základních fyzikálních principů, ale o jejich zpřesnění a o vyjasnění jejich významu v konkrétním kontextu.

Matematická formulace je v mechanice tekutin nepostradatelná a klasická mechanika je právem označována za aplikovanou matematiku. V tomto textu však bude matematika omezena na nezbytné minimum. Hlavním cílem je výklad významů, souvislostí a interpretačních důsledků základních tvrzení, nikoli jejich formální stránka.

Východisko polemiky

V učebnicích i na přednáškách se často setkáváme s tvrzením:

„Navierovy–Stokesovy rovnice vyjadřují zákon zachování hybnosti.“

Toto velmi jednoduché a jasné tvrzení je rozšířené a v určitém smyslu i oprávněné. Bez dalšího upřesnění je však neúplné a může vést k interpretačním nejasnostem. Smyslem následující diskuse není toto tvrzení popřít, ale uvést jej do přesnějšího kontextu a vyjasnit, v jakém smyslu je korektní a v jakém nikoli.

Pokud není důsledně rozlišeno mezi globálním a lokálním významem pojmu zachování, může si student mylně představit, že zachování hybnosti znamená časovou konstantnost rychlosti v každém bodě proudu. Taková interpretace je fyzikálně chybná, avšak vyplývá přirozeně z nejednoznačné formulace, která nerozlišuje mezi integrálním zákonem platným pro celý systém a diferenciální bilanční rovnicí platnou pro element kontinua. Výsledkem není fyzikální paradox, nýbrž terminologický a interpretační zmatek.

Bez dalšího upřesnění se jedná o typickou polopravdu, která za zcela specifických podmínek platí, za jakýchkoli jiných nikoli. V této neúplné formě se jedná o silně zavádějící tvrzení, zvláště pro přemýšlivého studenta. Ten se snadno může dostat na scestí, může logicky uvažovat např. takto:

„Základním přístupem v mechanice tekutin je diferenciální přístup, zkoumáme tedy ‚element‘ tekutiny. Lagrange uvažuje elementární částici hmoty, Euler elementární objem, standardem je druhý přístup. Zde, v renomované učeb-

nici, čtu tvrzení ‚hybnost se zachovává‘. Tedy hybnost jako součin hmotnosti a rychlosti je konstantní. V čase nebo v prostoru? No, asi v čase. Hmota se také zachovává, takže se musí zachovávat i rychlost! Logickým důsledkem zachování hybnosti je, že rychlost je v čase v jakémkoli místě prostoru konstantní. Znamená to tedy, že nemůže existovat nestacionární proudění? Logicky nemůže, protože nezachovává hybnost! Takže neexistuje ani turbulence. Ona ale existuje, jenže odporuje zákonu zachování hybnosti?! Nějak tomu přestávám rozumět...”

Zcela legitimní, logickou cestou se tak dostane k úplnému nesmyslu. Cílem následujících oddílů je tento rozdíl systematicky objasnit a zasadit běžně používaná tvrzení do přesného fyzikálního rámce.

Zákony zachování a koncepce systému

Zákony zachování patří k nejzákladnějším principům klasické fyziky. V přísném fyzikálním smyslu jsou formulovány jako výroky o **hmotném systému jako celku**. Tvrdí, že určitá integrální veličina – typicky hmota, hybnost nebo energie – je v čase konstantní, pokud je systém **izolovaný**. Izolovanost zde znamená, že systém si nevyměňuje s okolím hmotu ani energii a že na něj nepůsobí žádné vnější síly.

Klasická formulace zákonů zachování v mechanice hmotného bodu je systematicky rozpracována např. v práci [1], kde je zachování hybnosti odvozeno z translační invariance prostoru a výslovně formulováno jako tvrzení o celém izolovaném systému. Tento globální charakter zákona je zde zcela explicitní.

Tento globální pohled je přirozený v mechanice hmotných bodů, kde lze systém relativně snadno vymezit. V mechanice kontinua se však situace komplikuje tím, že systém je obvykle chápán jako objem tekutiny, který je v neustálé interakci se svým okolím. Je proto nezbytné pečlivě rozlišovat, zda hovoříme o celém izolovaném systému, nebo o jeho části.

V dalším textu bude pojem *zákon zachování* používán výhradně v tomto přísném globálním smyslu. Jsem si vědom toho, že v literatuře se běžně hovoří o „lokálních zákonech zachování“, avšak tyto rovnice mají vždy charakter bilančních vztahů pro neizolovaný element kontinua. Toto terminologické rozlišení je zde zavedeno záměrně, neboť považuji jeho explicitní formulaci za klíčovou pro správnou interpretaci rovnic mechaniky tekutin.

Lokální popis a bilanční rovnice

Lokální popis mechaniky kontinua vychází z představy, že fyzikální veličiny lze popsat jako spojitá pole závislá na prostoru a čase. Základním objektem není izolovaný systém, ale elementární objem kontinua, který je neustále v interakci se svým okolím. Takto definovaný element není a nemůže být izolovaný.

Rovnice mechaniky kontinua proto nemohou vyjadřovat zachování veličin ve smyslu jejich časové konstantnosti v elementu. Jejich správnou interpretací je bilance: časová změna hustoty veličiny v elementu je dána tokem přes jeho hranice a případnými zdroji nebo propady. Tento bilanční charakter je univerzální a platí pro hmotu, hybnost i energii.

Diferenciální bilanční struktura rovnic kontinua je systematicky vyložena např. v monografii [4], kde je důsledně rozlišeno mezi integrálními zákony zachování a jejich lokálními formulacemi ve tvaru bilančních rovnic. Bilanční charakter rovnic mechaniky tekutin je přehledně formulován např. v učebnici [5], kde je Navierova–Stokesova rovnice odvozena jako lokální bilance hybnosti.

Zásadní rozdíl mezi globálním a lokálním popisem tedy nespočívá v tom, že by jeden byl „správnější“ než druhý, ale v tom, že odpovídají různým otázkám. Globální zákony zachování poskytují informace o celkovém chování izolovaného systému, zatímco lokální bilanční rovnice popisují vnitřní strukturu a přenosy veličin v prostoru a čase. Podmínka zachování integrálu fyzikální veličiny při globálním popisu je ekvivalentní s podmínkou rovnováhy při lokálním popisu.

Symetrie jako původ zákonů zachování

Zákony zachování nejsou izolovanými postuláty, ale hluboce souvisejí se symetriemi fyzikálního popisu. Pokud jsou rovnice popisující systém invariantní vůči určité spojitě transformaci, existuje k této symetrii odpovídající zachovaná veličina. Obecná vazba mezi symetriemi a zákony zachování je formálně vyjádřena v práci [3] Emmy Noether², jejíž teorém tvoří koncepční základ moderní formulace mechaniky.

V klasické mechanice mají zásadní význam zejména symetrie prostoru a času. Homogenita času vede k zákonu zachování energie, homogenita prostoru k zachování hybnosti a izotropie prostoru k zachování momentu hybnosti.

² Amalie Emmy Noether (1882–1935) byla německá matematická, která významně přispěla k pokrokům na poli abstraktní algebry a teoretické fyziky.

Tyto zákony tedy nejsou vlastností konkrétního materiálu nebo elementu kontinua, ale důsledkem invariance fyzikálního popisu.

V mechanice kontinua se tato vazba projevuje nepřímě, protože lokální rovnice nejsou obvykle odvozovány explicitně z variačního principu. Přesto jejich struktura tyto symetrie respektuje. Galileovská invariance omezuje tvar konvekтивních členů, izotropie kontinua určuje formu tenzoru napětí a časová homogenita se promítá do energetické bilance. Pokud jsou tyto symetrie porušeny, objevují se v rovnicích dodatečné zdrojové členy a globální zákony zachování přestávají platit.

Zachování hybnosti: globální a lokální interpretace

Zachování hybnosti patří k nejčastěji nesprávně interpretovaným principům mechaniky tekutin. V globálním smyslu je zákon zachování hybnosti tvrzením o celkové hybnosti izolovaného systému, tedy o součtu hybností všech jeho elementů. Časová změna této veličiny je rovna výslednici vnějších sil. Pouze v případě, že je tato výslednice nulová, zůstává celková hybnost konstantní. Zachování hybnosti je tedy podmíněným důsledkem translační symetrie prostoru a absence vnějších silových interakcí.

V lokálním popisu se hybnost zavádí jako hustota hybnosti, rovná součinu hustoty a rychlosti. Lokální rovnice hybnosti mají vždy charakter bilančních rovnic a vyjadřují změnu hustoty hybnosti v elementárním objemu kontinua v důsledku toků a silového působení. V případě newtonovské tekutiny mají tyto rovnice podobu Navierových–Stokesových rovnic.

Navierovy–Stokesovy rovnice jako rovnováha sil

Navierovy–Stokesovy rovnice jsou v praxi velmi často odvozovány a interpretovány nikoli explicitně jako bilanční rovnice hybnosti, ale jako **rovnice rovnováhy sil působících na element kontinua**. Tato interpretace je důsledkem lokálního popisu. Tento způsob výkladu je historicky i didakticky hluboce zakořeněný a má svou vnitřní logiku. Vychází z aplikace druhého Newtonova pohybového zákona na elementární objem tekutiny.

V tomto pojetí je lokální zrychlení elementu kontinua (vyjádřené materiálovou derivací rychlosti) chápáno jako důsledek působení sil: tlakových, vazkých a případných objemových sil, jako je gravitace. Navierovy–Stokesovy rovnice tak nabývají tvaru rovnováhy mezi setrvačnou silou a ostatními silovými příspěvky.

Z tohoto hlediska se nejedná o zákon zachování hybnosti, ale o **rovnici pohybu**, analogickou Newtonově rovnici pro hmotný bod.

Tento silový výklad je fyzikálně korektní, avšak snadno zakrývá skutečnost, že jednotlivé členy rovnice mají zároveň význam toků a přenosů hybnosti. Konvektivní člen není silou, protože nepředstavuje interakci s okolím. Je výrazem přenosu hybnosti prouděním a vzniká výhradně v důsledku eulerovského popisu pohybu. Jeho interpretace jako síly je didaktická zkratka, nikoli fyzikální nutnost. Tlakový a vazký člen nejsou pouze silami, ale představují divergence toků hybnosti zprostředkovaných tenzorem napětí. Silový jazyk je zde tedy do značné míry interpretačním přepisem bilanční struktury rovnice.

Je příznačné, že samotná hybnost jako integrální veličina se v Navierových–Stokesových rovnicích explicitně nevyskytuje. Vystupuje zde pouze její hustota a její změna v čase a prostoru. Pokud bychom Navierovy–Stokesovy rovnice interpretovali jako lokální zákon zachování hybnosti ve smyslu časové konstantnosti, musela by být materiálová derivace rychlosti identicky nulová, což by vedlo k absurdním závěrům. Správná interpretace je taková, že rovnice popisují **změnu hybnosti v důsledku silového působení**, nikoli její zachování.

Zachování hybnosti se může projevit až na úrovni celého systému. Při integraci Navierových–Stokesových rovnic přes celý objem systému se vnitřní silové interakce – tlakové i vazké – navzájem vyruší a zůstane pouze příspěvek vnějších sil působících na hranici nebo v objemu. Pokud je výslednice těchto sil nulová, redukuje se lokální rovnice pohybu na globální zákon zachování hybnosti.

Navierovy–Stokesovy rovnice lze tedy chápat dvojím, vzájemně konzistentním způsobem: jako lokální bilanční rovnice hybnosti a současně jako rovnice rovnováhy sil působících na element kontinua. Oba pohledy jsou fyzikálně ekvivalentní, avšak kladou důraz na odlišné aspekty téhož problému. Zdrojem časových nedorozumění není fyzikální rozpor, ale nejasné přecházení mezi těmito dvěma interpretačními rámci.

Navierovy–Stokesovy rovnice tedy formálně představují na levé straně silové účinky ve formě změny hybnosti, na pravé straně jsou potom síly, které tyto změny způsobují. Jedná se o součet povrchových sil, tedy tlakové a vazké, a dále objemových sil, kterými jsou gravitační účinky, případně důsledky neinerciálnosti systému, např. dostředivá síla při rotaci systému.

Zachování hmoty a energie

Zachování hmoty má v mechanice kontinua nejjednoznačnější postavení. Lokální rovnice kontinuity vyjadřuje bilanci mezi časovou změnou hustoty a tokem hmoty. Neexistují zde žádné vnitřní zdroje ani disipativní mechanismy; hmota se může pouze přemisťovat. Globální zachování hmoty se projeví tehdy, je-li systém hmotově uzavřený.

Zachování energie má naproti tomu výrazně komplexnější strukturu. Lokální energetická rovnice má vždy charakter bilance, v níž se vedle akumulace a toku objevují i disipativní členy a přeměny mezi různými formami energie. Mechanická energie se může lokálně přeměňovat na vnitřní energii prostřednictvím vazké disipace. Teprve při integraci přes celý objem izolovaného systému se lokální bilance redukuje na globální zákon zachování energie.

Idealizace izolovaného systému a inerciální soustavy

Izolovaný mechanický systém je idealizací, která v přísném smyslu neexistuje v žádné reálné fyzikální situaci. Každý reálný systém komunikuje s okolím prostřednictvím hmoty, energie nebo silového působení. Přesto je pojem izolovaného systému mimořádně užitečný, neboť umožňuje formulovat obecné zákony zachování a pochopit jejich vztah k symetriím fyzikálního popisu.

Podobně i inerciální vztahná soustava je idealizací. Zákon zachování hybnosti vyžaduje absenci vnějších sil, nikoli nutně inerciální soustavu, zatímco inerciální soustava sama o sobě nezaručuje izolaci systému. Tyto dvě idealizace jsou nezávislé a je třeba je důsledně rozlišovat.

Mikroskopický a makroskopický popis

Na mikroskopické úrovni je zákon zachování hybnosti striktně platný při každé interakci molekul. Makroskopický popis mechaniky tekutin však není přímým přepisem mikroskopických zákonů, ale jejich statistickým průměrem. Mikroskopická hybnost se na makroskopické úrovni rozkládá do několika kvalitativně odlišných příspěvků.

Uspořádaný pohyb molekul se projevuje jako makroskopická hybnost, spojená s rychlostním polem. Neuspořádaný pohyb molekul se projevuje jako tlak, vazkost a vnitřní energie, spojená s teplotou. To, co se na makroskopické úrovni může jevit jako ztráta hybnosti, je ve skutečnosti její přeměna do jiných forem.

Důvodem je, že hybnost jednotlivých molekul, respektive jejich kinetická energie, se na makroskopické úrovni neprojevuje jedním jediným způsobem, ale rozkládá se do tří kvalitativně odlišných příspěvků.

Prvním z nich je makroskopická hybnost, spojená s uspořádaným pohybem molekul a popsaná rychlostí proudění tekutiny – tzv. grupovou rychlostí. Druhým příspěvkem jsou tlaková a vazká síla, které vznikají z přenosu mikroskopické hybnosti náhodného pohybu molekul na stěny nebo na okolní objemy tekutiny a v kontinuu se objevují jako tenzor napětí. Třetím projevem je teplota, jež je mírou střední kinetické energie neuspořádaného molekulárního pohybu a která se na makroskopické úrovni neprojevuje jako hybnost, ale jako vnitřní energie systému.

Tato trojí projekce mikroskopické dynamiky na makroskopické veličiny je klíčová pro pochopení rozdílu mezi mikroskopickým a kontinuálním popisem. Zatímco na úrovni molekul se hybnost pouze přerozděluje mezi jednotlivé částice, na makroskopické úrovni se tentýž proces jeví jako vznik tlaku, vazkosti, teploty a disipace. Právě zde se ztrácí jednoduchá interpretace zákona zachování hybnosti: makroskopická hybnost není prostým součtem mikroskopických hybností, ale pouze jejich uspořádanou složkou. Zbytek se „skryje“ v tlaku, vazkosti a vnitřní energii.

Povšimněme si v této souvislosti, že principy zachování kinetické energie a zachování hybnosti lze v mikrosvětě interpretovat jako totožné koncepte.

Statistický přechod mezi mikroskopickým a makroskopickým popisem je klasicky analyzován např. v práci [2], kde je makroskopická dynamika chápána jako statistická projekce mikroskopických zákonů zachování.

Makroskopické rovnice mechaniky tekutin proto nelze chápat jako přímý přepis mikroskopického zákona zachování hybnosti, ale jako jeho statistickou projekci, která zachovává konzistenci přenosu veličin v prostoru a čase.

Závěr

Globální a lokální popis v mechanice kontinua představují dva komplementární pohledy na tentýž fyzikální systém. Globální zákony zachování jsou výroky o integrálních veličinách izolovaného systému a vyplývají ze symetrií fyzikálního popisu. Lokální rovnice jsou bilanční vztahy platné pro neizolované elementy kontinua a popisují přenos a přeměnu veličin v prostoru a čase.

Navierovy–Stokesovy rovnice je proto nejpřesnější chápat jako lokální bilanční rovnice hybnosti, které současně vyjadřují lokální podmínku rovnováhy sil. Jejich integrální důsledky se při vhodné volbě systému a okrajových podmínek redukují na globální zákon zachování celkové hybnosti systému.

Rozpor v jejich interpretaci není fyzikální, ale terminologický a didaktický.

Literatura

- [1] LANDAU, Lev D., LIFSHITZ, Evgeny M. *Mechanics*. 3rd ed. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [2] LANDAU, Lev D., LIFSHITZ, Evgeny M. *Statistical Physics, Part 1*. Butterworth-Heinemann, 1980.
- [3] NOETHER, Emmy. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1918, Jg. 1918, s. 235–257.
- [4] TRUESDELL, Clifford, NOLL, Walter. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 1965.
- [5] WHITE, Frank M. *Viscous Fluid Flow*. 3rd ed. McGraw-Hill, 2006.

Polární rozklad deformačního gradientu a celnice

Polar Decomposition of Deformation Gradient and Female Customs Officer

Prof. Ing. Miloslav Okrouhlík, CSc.

Foreword

Many years ago, I drove a rental car from the Canadian province of Alberta to the state of Montana in the United States. The roads were quiet, with only a few cars crossing the border. A bored female customs officer, standing outside her small customs house, decided to stop me.

After I handed her my passport, she politely asked me to step inside and provide more details about my trip.

“Czech Republic?”

“Is that in Europe?”

“What do you plan to do in the States?”

“Do you have enough money to cover your expenses?”

And finally, a question that seemed straight out of her training manual: “What is your profession?”

To keep things simple, I usually say, “I’m a teacher.” Her eyes narrowed with suspicion. “What do you teach?” she asked. “Continuum mechanics,” I replied.

She raised her eyebrows, clearly unimpressed, and followed up with, “What’s your favorite subject?” By then, she seemed a bit more relaxed, so I tried to reassure her of my good intentions: “Polar decomposition of the deformation gradient,” I said. “And if you could give me a pencil and some paper, I’d be happy to explain.”

Evidently, she wasn’t interested but a faint smile flickered in her eyes, and she waved me through.

And so, the following details, about the deformation gradient and its polar decomposition, are for the readers who, perhaps, might be interested.

Polární rozklad deformačního gradientu

Připomeňme, že v nelineární mechanice poddajných těles s velkými posunutími a velkými přetvořeními se pro popis pohybu částice používá tzv. *lagrangeovská* formulace. Je to deformační předpis, psaný pro čas t , a to pro přechod částice z referenční konfigurace 0C do konfigurace okamžité tC , který píšeme pro souřadnici každé částice sledovaného tělesa ve tvaru ${}^tx_i = {}^tx_i({}^0x_j, t)$. Levý horní index 0 označuje konfiguraci referenční, index t pak konfiguraci okamžitou. Inverzní funkce, tedy ${}^0x_i = {}^0x_i({}^tx_j, t)$, se nazývá formulací *eulerovskou*. Obě formulace aplikované na jeden fyzikální děj, tedy deformaci tělesa, musejí dát stejné výsledky. Podmínkou je vzájemná invertovatelnost těchto funkcí, a ta je splněna,

jestliže $J = \det({}^tF_{ij}) \neq 0$, kde J je *jakobián* transformace a ${}^tF_{ij} = \frac{\partial {}^tx_i}{\partial {}^0x_j}$ je tak zvaný materiálový *deformační gradient*. Je definován v konfiguraci 0C a vztahuje se ke konfiguraci tC . Jeho levé indexy to naznačují. Na deformační gradient můžeme nahlížet jako na operátor popisující, jak elementární úsečka $d^0\mathbf{x}$, v referenční konfiguraci 0C , se změní na $d^t\mathbf{x}$ v konfiguraci tC , tedy $d^t\mathbf{x} = {}^t\mathbf{F}d^0\mathbf{x}$. V lineární mechanice kontinua je deformační gradient jednotkovou maticí. Deformaci tělesa tedy počítáme, ale změnu tvaru, protože je malá, následně zanedbáváme a napětí pak počítáme z nedeformované konfigurace.

Dokazuje se, že každý regulární tenzor druhého řádu se dá napsat jako součin dvou tenzorů – pozitivně definitního a ortogonálního. Tento postup se nazývá polárním rozkladem. Ten platí i pro odpovídající matice. Namísto ${}^tF_{ij}$ často píšeme ${}^t\mathbf{F}$ nebo jen $\mathbf{F}$ apod. Viz např. [1]. Aplikace v mechanice se připisuje Richterovi [2]. Rozlišuje se pravý a levý polární rozklad deformačního gradientu. V maticovém zápisu se zapisují ve tvaru:

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{U} \dots \text{pravý rozklad,}$$

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}\mathbf{R} \dots \text{levý rozklad.}$$

$\mathbf{R}$ je tenzor rotace, ten je podle předpokladu ortogonální a platí, že jeho inverzi získáme pouhou transpozicí, tedy $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou tzv. pravé a levé tenzory protažení (nikoli přetvoření), jsou symetrické a platí $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ a $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ – navíc jsou pozitivně definitní. Z pozitivní definitnosti plyne, že mají kladná vlastní čísla a ortogonální vlastní vektory.

Transformace ${}^0C \rightarrow {}^tC$, vyjádřená deformačním gradientem $\mathbf{F}$, se dá pomocí pravého polárního rozkladu představit jako složená z deformace ${}^0C \rightarrow {}^UC$, popsané tenzorem protažení $\mathbf{U}$, po níž následuje rotace ${}^UC \rightarrow {}^tC$, popsaná tenzorem rotace $\mathbf{R}$. Myšlenkový rozklad deformace probíhá v „zastaveném“ čase, konfigurace UC představuje jistou mezipolohu. Podobně pro levý rozklad.

Polární rozklad se dá algoritmizovat následovně:

1. Pro zadaný deformační gradient $\mathbf{F}$, odpovídající transformaci ${}^0C \rightarrow {}^tC$,
2. vypočti pravý Cauchyho-Greenův deformační tenzor uložený v matici $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$,
3. najdi vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{C}$, třeba pomocí Matlabu, tj. $[\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Lambda}] = \text{eig}(\mathbf{C})$, kde matice $\mathbf{\Psi}$ obsahuje po sloupcích vlastní vektory, vlastní čísla jsou na diagonále matice $\mathbf{\Lambda}$,
4. vypočti pravý tenzor protažení $\mathbf{U} = \mathbf{\Psi} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Psi}^T$,
5. vypočti tenzor rotace $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$,
6. vypočti levý tenzor protažení $\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T$.

Důkaz platnosti postupu je uveden v [3].

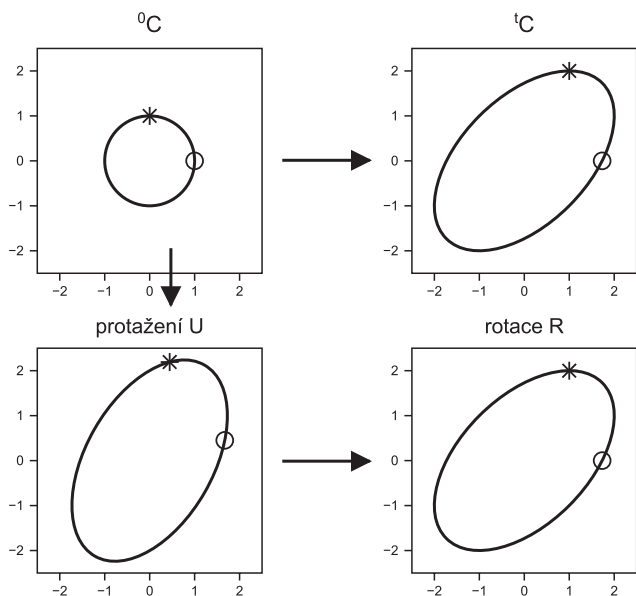
Příklad:

Určete tvar „tělesa“ ve tvaru kružnice, a to po statické (zastavené v čase) ho-

mogenní deformaci, definované deformačním gradientem ${}_0^t\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad byl řešen numericky podle výše naznačeného postupu.

Výsledky jsou na následujícím obrázku:



Horní řada ukazuje přímý postup, tedy $d^t\mathbf{x} = {}^t_0\mathbf{F}d^0\mathbf{x}$, dolní řada pak posloupnost dvou kroků – napřed je aplikováno protažení a pak rotace tělesa jako celku. Je vyznačena poloha dvou bodů tělesa, ležících na přímkách procházejících středem a původně svírajících pravý úhel. Všimněte si, že proces protažení vyvolává deformaci jakékoli elementární úsečky (změnu délky a směru), zatímco proces rotace délku této úsečky, a tedy ani tvar tělesa, nemění a nepřispívá tak ke změně napjatosti. Analytický postup je uveden v [4].

Polární rozklad deformačního gradientu, původně čistě akademická myšlenka, se stal efektivním a elegantním konceptem, který umožňuje rozdělit celkovou deformaci na „čistou“ deformaci a na rotaci tělesa jako tuhého celku. Rozklad se tak stal užitečným nástrojem, který zjednodušuje výpočet napětí v nelineární mechanice kontinua.

Polární rozklad je implementován např. v konečnoprvkové aplikaci ABAQUS a je dostupný prostřednictvím uživatelských procedur UMAT a VUMAT. Za zmínku stojí, že teoretický manuál aplikace ABAQUS je napsán tak, že by z fleku mohl být používán jako učebnice mechaniky kontinua. Viz [5].

Také ANSYS s polárním rozkladem pracuje při řešení úloh s hyperelastickými, plastickými a anisotropními materiály, a to opět s uživatelsky definovanými procedurami. Viz [6].

Těž MSC Marc využívá polární rozklad deformačního gradientu při výpočtech zahrnujících velké deformace a nelineární materiálové chování. Viz [7].

A v neposlední řadě český konečnoprvkový systém PMD (Package for Machine Design), který si v ničem nezadá s aplikacemi zahraničními, též používá polární rozklad při řešení geometricky nelineárních úloh, a to korotační formulací, která předpokládá velká posunutí a malé deformace. Systém PMD má vlastní stránky, viz [8], a rozsáhlou online dokumentaci v češtině a angličtině, viz [9]. Aktuální verze je PMD verze 14 (f90.2), VAMET Ltd., 2024.

Ukazuje se, že polární rozklad tak není jen zajímavým matematickým trikem – je totiž efektivním nástrojem pro fyzikální interpretaci deformace a přetvoření těles v nelineární mechanice kontinua.

Literatura

- [1] BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav, SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. 799 s. Česká matice technická; roč. CV, 2000, č. 481. ISBN 80-200-0772-5.
- [2] RICHTER, Hans. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verformungen. *Mathematische Nachrichten*, Band 8, 1952, Nr. 1, s. 65–73. Dostupné také z: https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mathematik/ag_neff/richter_endliche_verzerrungen52.pdf
- [3] OKROUHLÍK, Miloslav, PTÁK, Svatopluk. *Počítačová mechanika I: základy nelineární mechaniky kontinua*. Vyd. 1. Praha: ČVUT, FJFI, 2006. 232 s. ISBN 80-01-03400-3.
- [4] OKROUHLÍK, Miloslav, ed. *Implementation of Nonlinear Continuum Mechanics in Finite Element Codes*. Praha: Ústav termomechaniky, 1995. 256 s. ISBN 80-85918-06-4.
- [5] *Abaqus* [online]. Dassault Systèmes, © 2026 [cit. 2026-07-12]. Dostupné z: <https://www.3ds.com/products/simulia/abacus>
- [6] *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*. Release 12.0. Canonsburg (Pennsylvania): ANSYS, April 2009. xxxvi + 1190 s.
- [7] *Quick Access Links to Marc Resources* [online]. 27 November, 2025 [cit. 2026-07-12]. Dostupné z: <https://simcompanion.hexagon.com/customers/s/article/Marc-Support-Home-Page>
- [8] *PMD – System for Finite Element Analysis* [online]. Last revision 2024 [cit. 2026-07-12]. Dostupné z: <https://www.pmd-fem.com/en/index.html>
- [9] *PMD Documentation* [online]. Institute of Thermomechanics ASCR & VAMET Ltd., © 2022–2025 [cit. 2026-07-12]. Dostupné z: <https://pmd.it.cas.cz/en:start>